

Technická univerzita v Liberci
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická

Katedra: matematiky a didaktiky matematiky

Studijní program: 2. stupeň

Kombinace: matematika-informatika

VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE

THE GENERATING FUNCTIONS

Diplomová práce: 09-FP-KMD-02

Autor:

Václav HENDRYCH

Podpis:

Adresa:

Stružnice 36

470 01 Česká Lípa

Vedoucí práce: RNDr. Jaroslava Justová

Konzultant:

Počet

stran	slov	obrázků	tabulek	pramenů	příloh
74	10366	0	0	11	0

V Liberci dne: 16. 12. 2008

Zadání DP

Prohlášení

Byl(a) jsem seznámen(a) s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracoval(a) samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím diplomové práce a konzultantem.

V Liberci dne: 16. 12. 2008.

Václav Hendrych

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji RNDr. Jaroslavě Justové za podnětné konzultace, rady, korekce a v neposlední řadě za trpělivost, kterou se mnou měla při přípravě diplomové práce.

Děkuji též ing. Petru Pospíšilovi za čas, který mi věnoval při občasných konzultacích.

VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE

Souhrn

Diplomová práce se zabývá vytvořujícími funkcemi, jejich vlastnostmi a především jejich aplikacemi. Text je rozdělen na tři základní celky. V první části bude čtenář seznámen se základními pojmy a zavede se vlastní pojem obyčejné vytvořující funkce. V další části následují aplikace, kde je na ilustrativních příkladech z oblasti kombinatoriky, řešení diferenčních rovnic či vztahů mezi posloupnostmi názorně ukázán přínos použití této početní techniky. V závěrečné části jsou pak na podobném principu uvedeny též exponenciální vytvořující funkce.

Klíčová slova: Posloupnost, mocninná řada, obyčejná vytvořující funkce, exponenciální vytvořující funkce, diferenční rovnice, kombinace, variace.

THE GENERATING FUNCTIONS

Summary

This diploma thesis deals with the ordinary generating functions, with their properties and mostly with their applications. The text structure is divided into three basic parts. In introduction, the reader is become acquainted of basic concepts and the actual definition of the generating function is presented. In further parts, the benefit of the using this technique is shown by presenting illustrative simple examples from combinatorics, difference equations solving and sequence relations. In the final part, the analogical concept of the exponential generating function is presented.

Keywords: Sequence, power series, ordinary generating function, exponential generating function, difference equation, combination, variation.

DIE ERZEUGENDEN FUNKTIONEN

Zusammenfassung

Diese Diplomarbeit beschäftigt sich mit den gewöhnlichen erzeugenden Funktionen, mit denen Eigenschaften und vor allem mit den Applikationen. Der Text ist in drei Grundteile gegliedert. In dem ersten Teil werden die Grundbegriffe bekannt und es wird der eigentliche Begriff die erzeugende Funktion erklärt. In dem nächsten Teil folgen die Applikationen, hier wird anschaulich der Beitrag der Anwendung dieser rechnerischen Technik gezeigt, und zwar mit Hilfe von demonstrativen kombinatorischen Beispielen, von Lösungen der Differenzgleichungen oder von Verhältnissen zwischen den Folgen. Im Schluss werden dann auf Grund eines ähnlichen Prinzips auch exponentielle erzeugende Funktionen eingeführt.

Die Schlüsselwörter: Die Sequenz, die Potenzreihe, die gewöhnliche Funktion, die exponentielle Funktion, die Differenzgleichung, die Kombination, die Variation

Obsah

1. Úvod	7
2. Obyčejné vytvořující funkce	8
2.1. Základní pojmy	8
2.2. Zavedení obyčejné vytvořující funkce.....	12
3. Aplikace vytvořujících funkcí	24
3.1. Úlohy o posloupnostech	24
3.1.1. Rekurentní vztahy	24
3.1.2. Fibonacciho čísla	26
3.2. Součtové vzorce	30
3.3. Řešení lineárních diferenčních rovnic	35
3.3.1. Základní pojmy	35
3.3.2. Homogenní diferenční rovnice.....	36
3.3.3. Nehomogenní dif. rovnice se speciální pravou stranou	37
3.3.4. Homogenní dif. rovnice s nekonstantními koeficienty	40
3.3.5. Nehomogenní dif. rovnice s nespeciální pravou stranou	42
3.4. Kombinatorické úlohy	44
3.4.1. Základní kombinatorické úlohy	45
3.4.2. Celočíselné řešení rovnice	51
3.4.3. Vlastnosti kombinačních čísel.....	54
3.5. Aplikace v teorii pravděpodobnosti.....	55
4. Exponenciální vytvořující funkce	60
4.1. Zavedení exponenciálních vytvořujících funkcí.....	60
4.2. Aplikace exponenciálních vytvořujících funkcí	65
4.2.1. Stirlingova čísla	67
4.2.2. Bellova čísla	70
5. Závěr	73
6. Seznam použité literatury	74

1. Úvod

Vytvořující funkce jsou jakýmsi přemostěním mezi diskrétní matematikou a částí matematické analýzy. Jedná se o početní techniku, jejíž základní myšlenkou je přiřazení určité spojité funkce (tzv. vytvořující funkce) ke studované posloupnosti. Nijak se tím neztrácí původní posloupnost, protože informace o ní daná funkce v sobě obsahuje. Výhodou pak je, že úlohy o posloupnostech lze takto řešit využitím operací s funkcemi, což je mnohdy pohodlnější.

Předkládaná diplomová práce se zabývá dvěma důležitými typy těchto funkcí, a to obyčejnými a exponenciálními vytvořujícími funkcemi. V první části práce je ukázán přechod od posloupností k vytvořujícím funkcím. Budou zde také uvedeny (a dokázány) jejich vlastnosti. Následovat pak budou aplikace, tedy ukázky použití při výpočtech, na které je tato práce především zaměřena. Na různých typech příkladů je předvedeno řešení úloh o posloupnostech, odvození některých součtových vzorců a také řešení diferenčních rovnic, vše samozřejmě za použití této početní techniky, která je v této oblasti poměrně nestandardní. Oblíbenou oblastí jsou také kombinatorické úlohy a teorie pravděpodobnosti, což je další látka, ve které vytvořující funkce naleznou své uplatnění.

Ve 2. a 3. kapitole se práce zabývá obyčejnými vytvořujícími funkcemi, v další části se pak věnuje vytvořujícím funkcím exponenciálním. I ty naleznou uplatnění při různých výpočtech, o čemž se znovu na praktických příkladech přesvědčíme.

V textu budou k nalezení též některé zajímavé posloupnosti. Bude se jednat o Fibonacciho posloupnost, Stirlingova a Bellova čísla.

2. Obyčejné vytvořující funkce

2.1. Základní pojmy

Ještě než zavedeme vlastní pojem *obyčejné vytvořující funkce*, připomeneme v této kapitole některé důležité definice a věty o posloupnostech, číselných a mocninných řadách, z nichž budeme pak v dalším textu vycházet.

Definice 2.1.1. (posloupnost): Přiřadíme-li každému přirozenému číslu n číslo a_n a čísla a_n seřadíme podle rostoucích indexů, říkáme, že jsme utvořili posloupnost. Značíme ji $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ nebo také (a_n) .

Zpravidla používáme dva způsoby pro předpis posloupnosti:

- a) vzorcem vyjadřujícím n -tý člen posloupnosti (a_n) pomocí n , např. pro posloupnost všech přirozených lichých čísel je $a_n = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$.
- b) vzorcem udávajícím rekurentní vztah pro $(k + 1)$ -ní člen posloupnosti pomocí předcházejících k členů, přičemž jsou zadány počáteční členy a_1, \dots, a_k . Například pro posloupnost lichých čísel je $a_n = a_{n-1} + 2$, $a_1 = 1$.

Definice 2.1.2. (limita posloupnosti): Říkáme, že posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ má (konečnou, vlastní) limitu a (konverguje k číslu a), jestliže k libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové přirozené číslo n_0 (v obecném případě závislé na volbě čísla ε), že pro všechna $n > n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon$. Značíme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Definice 2.1.3. Má-li posloupnost (konečnou) limitu, nazývá se *konvergentní*. V opačném případě je *divergentní*.

Definice 2.1.4. (nekonečná číselná řada): Budiž dána posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Symbol

$$a_1 + a_2 + a_3 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

nazýváme řadou příslušnou dané posloupnosti.

Součet $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ nazýváme n -tým částečným součtem této řady a posloupnost (s_n) označujeme jako posloupnost částečných součtů uvedené řady.

Definice 2.1.5. (konvergence řady): Je-li posloupnost částečných součtů $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní a má-li (konečnou) limitu s , tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s,$$

říkáme, že řada je konvergentní a má součet s . Je-li posloupnost (s_n) divergentní, pak také o řadě příslušné dané posloupnosti říkáme, že je divergentní.

Např. pro geometrickou řadu $1 + q + q^2 + \dots$ je

$$s_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (q \neq 1).$$

Je-li $|q| < 1$, pak

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1 - q}$$

a řada je konvergentní. Pro $q = 1$ je $s_n = n$, posloupnost částečných součtů tedy diverguje k $+\infty$. Pro $q = -1$ je $s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0$, posloupnost s_n nemá limitu a řada je tudíž divergentní. Divergentní je samozřejmě též pro $|q| > 1$.

Pro zjištění konvergence řady se užívají různá kritéria. Uvedme zde alespoň jedno:

Věta 2.1.1. (limitní podílové kritérium): Mějme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s kladnými členy a dále mějme $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Pak pro $L < 1$ je daná řada konvergentní, pro $L > 1$ je konvergentní a pro $L = 1$ může být buď konvergentní nebo divergentní.

Definice 2.1.6. (absolutní konvergence číselné řady): Konverguje-li řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \quad (1)$$

potom konverguje také řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (2)$$

přičemž říkáme, že řada (2) konverguje absolutně (je *absolutně konvergentní*).

Poznámka:

1. Obráceně to však neplatí, tj. konverguje-li řada (2), řada (1) nutně konvergentní být nemusí. Pokud tedy řada (2) konverguje a řada (1) diverguje, pak říkáme, že řada (2) konverguje neabsolutně.
2. Pro absolutně konvergentní řady platí asociativní, komutativní a distributivní zákony.

Věta 2.1.2. (součin řad): Pro absolutně konvergentní řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

platí

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}.$$

Definice 2.1.7. (mocninná řada): Mocninnou řadou (se středem v bodě 0) budeme rozumět nekonečnou řadu tvaru

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

kde (a_n) je posloupnost reálných čísel a x je proměnná nabývající reálných hodnot. Uvedenou mocninnou řadu budeme zpravidla označovat $a(x)$.

Pro mocninné řady určujeme množinu M všech x , pro které je daná řada konvergentní. Pokud mocninná řada konverguje v bodě $x_0 \neq 0$, pak konverguje absolutně pro všechna $x \in (-|x_0|, |x_0|)$.

Definice 2.1.8. (poloměr konvergence): Největší vzdálenost bodu x_0 od počátku, pro které mocninná řada ještě konverguje, označujeme jako *poloměr konvergence* R a platí $R \geq 0$.

V závislosti na poloměru konvergence R mohou nastat následující případy:

- a) $R = 0$. Pak řada konverguje pouze v bodě 0.
- b) $R > 0$, reálné. Pak řada konverguje v $(-R, R)$, přičemž konvergenci v krajních bodech je třeba vyřešit samostatně pomocí vhodného kritéria pro číselné řady.
- c) $R = +\infty$.

Věta 2.1.3. (určení poloměru konvergence): Necht' existuje (konečná, nekonečná) limita

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \rho.$$

Potom pro poloměr konvergence je

$$R = \frac{1}{\rho},$$

přičemž pro $\rho = +\infty$ klademe $R = 0$ a pro $\rho = 0$ je $R = +\infty$.

Věta 2.1.4. (derivace mocninné řady): Mocninnou řadu derivujeme podobně jako mnohočlen, tedy „člen po členu“ následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots)' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \end{aligned}$$

přičemž takto nově vzniklá řada má stejný poloměr konvergence R jako řada původní.

Věta 2.1.5. (integrace mocninné řady): Mocninnou řadu integrujeme podobně jako mnohočlen, tedy „člen po členu“ následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}
& \int (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots) dx \\
&= \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx \\
&= \left(a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \frac{a_2x^3}{3} + \dots \right) + C \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) + C.
\end{aligned}$$

Věta 2.1.6. (binomická věta): $\forall n \in \mathbf{N}$ platí:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n} b^n,$$

kde číslům $\binom{n}{k}$ říkáme *binomické koeficienty* a počítáme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!},$$

přičemž $0! = 1$

V textu budeme také značit $\binom{n}{k} = C(n, k)$.

Binomickou větu lze zobecnit také pro $n \in \mathbf{R}$.

2.2. Zavedení obyčejné vytvořující funkce

V této kapitole zavedeme tzv. *obyčejné vytvořující funkce* a budeme se zabývat jejich základními vlastnostmi, které se nám budou hodit pro budoucí výpočty.

Na několika posloupnostech ukážeme způsob vytvoření jí odpovídající vytvořující funkce (popřípadě též obrácený postup), na závěr pak uvedeme jejich přehled.

Poznámka: Na rozdíl od definice, uvedené v kapitole 2, budeme všude uvažovat $n \in \mathbf{N}_0$, tj. symbolem (a_n) budeme nyní označovat posloupnost (a_0, a_1, a_2, \dots) .

Definice 2.2.1. (obyčejná vytvořující funkce): Necht' (a_n) je posloupnost reálných čísel. Vytvořující řadou této posloupnosti rozumíme mocninnou řadu

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Je-li tato řada konvergentní pro nějaké $x \neq 0$, nazveme tuto řadu obyčejnou vytvořující funkcí této posloupnosti a budeme ji značit $a(x)$.

Má-li posloupnost (a_n) jen konečně mnoho nenulových členů, její obyčejná vytvořující funkce je mnohočlen.

Poznámka:

1. Dále v kapitolách 2. a 3. budeme obyčejné vytvořující funkce označovat jen jako *vytvořující funkce*.
2. Budeme-li chtít z vytvořující funkce zpětně určit posloupnost, kterou určuje, vyjdeme z Taylorova rozvoje dané funkce v bodě 0. Platí

$$a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!},$$

kde $a^{(n)}(0)$ je označení pro n -tou derivaci v bodě 0.

3. Z konstrukce vytvořující funkce a z bodu 2 vyplývá, že vytvořující funkce k dané posloupnosti je určena jednoznačně.
4. Definiční obor vytvořující funkce je stejný jako obor konvergence příslušné řady.
5. Řady s poloměrem $R = 0$ do vytvořujících funkcí nezahrnujeme.
6. Zápisem $(a_n) \leftrightarrow a(x)$ budeme označovat vzájemně si odpovídající posloupnost a její vytvořující funkci.

Příklad 2.2.1. Jaká je vytvořující funkce posloupnosti (a_n) , $a_n = 1$?

Vytvořující řadou této posloupnosti je geometrická řada

$$a(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

s kvocientem $q = x$, která pro $x \in (-1, 1)$ má součet $\frac{1}{1-x}$, vytvořující funkcí dané posloupnosti je tedy

$$a(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Základní vlastnosti vytvořujících funkcí:

Nejprve označme (a_0, a_1, a_2, \dots) a (b_0, b_1, b_2, \dots) posloupnosti a $a(x)$, $b(x)$ k nim příslušné vytvořující funkce, tedy $a(x) = \sum_0^\infty a_n x^n \leftrightarrow (a_n)_{n=0}^\infty$, $b(x) = \sum_0^\infty b_n x^n \leftrightarrow (b_n)_{n=0}^\infty$.

1. Sčítáme-li posloupnosti, odpovídá tomu též sčítání k nim příslušných vytvořujících funkcí. Tedy posloupnost $(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$ má vytvořující funkci $a(x) + b(x)$.

Důkaz: Utvořme posloupnost $c_n = (a_n + b_n)$. Její vytvořující funkci označme $c(x)$. Pak

$$c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = a(x) + b(x).$$

2. Násobíme-li posloupnost reálným číslem α , odpovídá tomu též násobení k ní příslušné vytvořující funkce číslem α . Tedy posloupnost $(\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \dots)$ má vytvořující funkci $\alpha a(x)$.

Důkaz: Vytvořující funkce dané posloupnosti je

$$\alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n x^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \alpha a(x).$$

3. Je-li n nějaké přirozené číslo, vytvořující funkce $x^n a(x)$ odpovídá posloupnosti $(0, 0, \dots, 0, a_0, a_1, a_2, \dots)$, kde se číslo 0 vyskytuje právě n -krát (to je velmi užitečné pro „posunutí“ posloupnosti doprava o potřebný počet míst).

Důkaz: $(0, 0, \dots, 0, a_0, a_1, \dots) \leftrightarrow a_0 x^n + a_1 x^{n+1} + \dots = x^n (a_0 + a_1 x + \dots) = x^n a(x)$, kde n je počet nul na začátku posloupnosti.

4. Naopak, chceme-li posloupnost „posunout“ doleva o potřebný počet míst, neboli získat vytvořující funkci pro posloupnost $(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)$, odečteme prvních k členů a následně budeme dělit danou vytvořující funkci x^k . Tedy vytvořující funkcí takové posloupnosti je

$$\frac{a(x) - a_0 - a_1 x - \dots - a_{k-1} x^{k-1}}{x^k}.$$

Důkaz: Vytvořující funkcí posl. $(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)$ je

$$a_k + a_{k+1} x + a_{k+2} x^2 + \dots = \frac{a(x) - a_0 - a_1 x - \dots - a_{k-1} x^{k-1}}{x^k}.$$

5. Je-li $a(x) \leftrightarrow (a_n)$, pak vytvořující funkcí pro posloupnost $(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \dots)$ je $a(\alpha x)$.

Důkaz: Daná posloupnost má vytvořující funkci

$$a_0 + \alpha a_1 x + \alpha^2 a_2 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n x^n = a(\alpha x).$$

6. Je-li $a(x)$ vytvořující funkcí posloupnosti (a_n) , pak vytvořující funkcí pro posloupnost, v níž nk -tý člen bude roven k -tému členu původní posloupnosti a všechny ostatní členy budou nulové, je funkce $a(x^n)$.

Důkaz:

$$\begin{aligned} a(x^n) &= a_0 + a_1 x^n + a_2 x^{2n} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{nk} \leftrightarrow (a_0, 0, 0, \dots, a_1, 0, 0, \dots, a_2, 0, 0, \dots), \end{aligned}$$

kde se nuly mezi členy a_k v dané posloupnosti vyskytují právě $(n-1)$ -krát.

7. Vytvořující funkcí pro posloupnost $((n+1)a_{n+1})$ je funkce $a'(x)$.

Důkaz: Daná posloupnost má vytvořující funkci

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{(n+1)} x^n = a'(x).$$

8. Vytvořující funkcí pro posloupnost částečných součtů, tj. (s_0, s_1, s_2, \dots) je

$$\frac{a(x)}{1-x}.$$

Důkaz: Hledáme tedy vytvořující funkci pro posl. $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots)$.

Vytvořující řada bude tedy

$$a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n a_i x^n.$$

Vytkneme a dostaneme

$$\begin{aligned} &a_0(1 + x + x^2 + \dots) + a_1 x(1 + x + x^2 + \dots) + a_2 x^2(1 + x + x^2 + \dots) \\ &+ \dots = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)(1 + x + x^2 + \dots) \\ &= \frac{a(x)}{1-x}, \end{aligned}$$

neboť

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}, a(x) \leftrightarrow a_n.$$

9. Pro posloupnost (a_n) , $a_n = na_n$ je vytvořující funkce $xa'(x)$.

Důkaz: Vychází z vlastností (3) a (7).

10. Násobení řad: $a(x)b(x)$ vytváří posloupnost (c_n) , kde

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Důkaz: Vychází ze součinu řad.

Uvedme nyní několik příkladů, ke kterým nalezneme jim odpovídající vytvořující funkce. Při tomto výpočtu budeme vycházet ze vzorce pro součet geometrické řady a především z výše uvedených vlastností.

Poznámka:

1. U všech zadaných posloupností je $n \in \mathbb{N}_0$.
2. U nalezených funkcí se prozatím nebudeme zabývat jejich definičními obory, ty uvedeme až v závěrečném přehledu posloupností a jejich vytvořujících funkcí. Postup pro jejich určení pomocí poloměru konvergence byl uveden v kapitole 2.1.

Příklad 2.2.2. Najděme vytvořující funkci k posloupnosti (a_n) , $a_n = (-1)^n$

Vytvořující řadou této posloupnosti je řada

$$a(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

Podle (5) je pak tedy vytvořující funkcí této posloupnosti

$$a(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Příklad 2.2.3. Najděme vytvořující funkci k posloupnosti (a_n) , $a_n = n$.

Odvoďme nejprve vytvořující funkci pro posloupnost (b_n) , $b_n = n + 1$, což je posloupnost přirozených čísel. Vytvořující řadou této posloupnosti je řada

$$b(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots$$

Na první pohled je tedy vidět, že potřebného výsledku dosáhneme derivací vytvořující funkce posloupnosti (a_n) , $a_n = 1$. Dostaneme tak

$$b(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Tuto vytvořující funkci upravíme dle vlastnosti (3) a dostaneme požadovaný výsledek:

$$a(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Příklad 2.2.4. Najděme vytvořující funkci k posloupnosti

$$(a_n)_{n=0}^{\infty}, a_n = \frac{1}{n} \text{ pro } n \geq 1, a_0 = 0.$$

Vytvořující řadou této posloupnosti je řada

$$\begin{aligned} a(x) &= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{1}{n}x^n + \dots \\ &= \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) + C, x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

Hodnotu konstanty C pak určíme z počáteční podmínky, takže $C = 0$.

Příklad 2.2.5. Najděme vytvořující funkci k posloupnosti (a_n) , $a_n = 2n + 1$.

Vytvořující řadou této posloupnosti je řada

$$a(x) = 1 + 3x + 5x^2 + \dots + (2n+1)x^n + \dots$$

Tuto řadu můžeme upravit na

$$a(x) = 1 + (1+2)x + (1+4)x^2 + \dots + (1+2n)x^n + \dots$$

Vidíme, že můžeme vyjít z vytvořující funkce samých jedniček a k ní přičítat násobky dvojek. Utvoříme si tak funkci $a(x) = b(x) + c(x)$, kde

$$\begin{aligned} b(x) &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}, \\ c(x) &= 0 + 2x + 4x^2 + \dots + 2nx^n + \dots = \frac{2x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

a dostaneme

$$a(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{2x}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^2}.$$

Příklad 2.2.6. Najděme vytvořující funkci k posloupnosti (a_n) ,

a_n je aritmetická posloupnost s předpisem $a_n = a_0 + nd, n \in \mathbf{N}_0$.

Vyjděme z předchozího příkladu, kde vlastně bylo $a_0 = 1, d = 2$. Utvoříme si znovu funkci $a(x) = b(x) + c(x)$, kde

$$b(x) = a_0 + a_0x + a_0x^2 + \cdots a_0x^n + \cdots = \frac{a_0}{1-x},$$

$$c(x) = 0 + dx + 2dx^2 + \cdots + ndx^n + \cdots = \frac{dx}{(1-x)^2}.$$

a dostaneme

$$a(x) = \frac{a_0}{1-x} + \frac{dx}{(1-x)^2}.$$

Příklad 2.2.7. Najděme vytvořující funkci k posloupnosti (a_n) ,

a_n je geometrická posloupnost s předpisem $a_n = a_0q^n, n \in \mathbf{N}_0$.

Podle (5) pro posloupnost $(b_n), b_n = q^n$ je vytvořující řada

$$b(x) = q^0 + q^1x + q^2x^2 + \cdots + q^nx^n + \cdots$$

a její vytvořující funkce

$$b(x) = \frac{1}{1-qx}.$$

Pak podle (2) pro hledanou posloupnost je vytvořující řada

$$a(x) = a_0q^0 + a_0q^1x + a_0q^2x^2 + \cdots + a_0q^nx^n + \cdots$$

a její vytvořující funkce je tedy

$$a(x) = \frac{a_0}{1-qx}.$$

Příklad 2.2.8. Najděme vytvořující funkci k posloupnosti

$(a_k), a_k = \binom{n}{k}, k = 0, 1, \dots, n, a_k = 0$ pro $k > n, n \in \mathbf{N}$ je pevně dané číslo.

Vytvořující řadou této posloupnosti je řada

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{k}x^k + \cdots + \binom{n}{n}x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^k,$$

kde po dosazení $a = 1, b = x$ do binomické věty dostáváme danou vytvořující funkci, která tak je

$$a(x) = (1+x)^n.$$

Příklad 2.2.9. Najděme vytvořující funkci k posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $a_n = n^2$.

Odvodíme nejprve vytvořující funkci pro posloupnosti $(b_n)_{n=0}^{\infty}$, $b_n = (n+1)^2$.

Vytvořující řadou této posloupnosti je řada

$$b(x) = 1 + 4x + 9x^2 + \dots + (n+1)^2 x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n.$$

Pro zjištění této vytvořující funkce posloupnosti druhých mocnin přirozených čísel opět začneme s posloupností jedniček, pro niž již vytvořující funkci známe,

je to $\frac{1}{1-x}$.

Z předchozího víme, že první derivace dává posloupnost přirozených čísel, neboť

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots$$

Druhá derivace je

$$\frac{2}{(1-x)^3}$$

a dává posloupnost $(2, 1, 3, 2, 4, 3, \dots)$. Člen s indexem k je $(k+2)(k+1) = (k+1)^2 + k + 1$. My ale potřebujeme $b_n = (n+1)^2$, takže ještě odečteme vytvořující funkci pro posloupnost $(1, 2, 3, \dots)$ a dostaneme vytvořující funkci pro posloupnost druhých mocnin přirozených čísel:

$$b(x) = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2},$$

kde $b_k = (k+1)^2$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Abychom dosáhli posloupnosti $a_n = n^2$, musíme podle (3) ještě funkci $b(x)$ násobit x , a tedy

$$a(x) = \frac{2x}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Příklad 2.2.10. Najděme vytvořující funkci k posloupnosti (a_n) , $a_n = n^3$.

Opět nejprve odvodíme vytvořující funkci pro posloupnost třetích mocnin přirozených čísel, tedy $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ $b_n = (n+1)^3$. Znovu vyjdeme z posloupnosti samých jedniček a její vytvořující funkce $\frac{1}{1-x}$. První derivace této funkce dává $\frac{1}{(1-x)^2}$, což, jak již víme, je vytvořující funkcí posloupnosti přirozených čísel.

Druhá derivace je $\frac{2}{(1-x)^3}$ a dává posloupnost $(2 \cdot 1, 3 \cdot 2, 4 \cdot 3, \dots)$. Třetí derivace je $\frac{6}{(1-x)^4}$ a ta dává posloupnost $(3 \cdot 2 \cdot 1, 4 \cdot 3 \cdot 2, 5 \cdot 4 \cdot 3, \dots)$. Člen s indexem n je $(n+3)(n+2)(n+1) = n^3 + 6n^2 + 11n + 6 = (n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 2(n+1)$. My ale potřebujeme $b_n = (n+1)^3$, takže odečteme ještě vytvořující funkce pro posloupnost $3(1, 4, 9, \dots)$ a $2(1, 2, 3, \dots)$. Dostaneme tak výslednou posloupnost

$$\begin{aligned} b(x) &= \frac{6}{(1-x)^4} - 3\left(\frac{2}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2}\right) - 2\frac{1}{(1-x)^2} \\ &= \frac{6}{(1-x)^4} - \frac{6}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Abychom dostali posloupnost $a_n = n^3$, musíme podle (3) ještě celou posloupnost posunout o jednu pozici doprava a tedy násobit x . Dostaneme pak požadovanou vytvořující funkci:

$$a(x) = \frac{6x}{(1-x)^4} - \frac{6x}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Poznámka: Vytvořující funkce předchozích dvou posloupností lze spočítat také jiným způsobem, budeme-li vycházet z prostého faktu, že $n^2 = n \cdot n$, $n^3 = n \cdot n^2$.

Z předchozího textu víme, že

$$a(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \leftrightarrow (a_n), a_n = n.$$

Pak podle (9) je

$$\begin{aligned} b(x) = xa'(x) &= \frac{x((1-x)^2 + 2x(1-x))}{(1-x)^4} = \frac{x((1-x) + 2x)}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \leftrightarrow \\ &(b_n), b_n = n^2. \end{aligned}$$

Podobně podle (9) je také

$$\begin{aligned} c(x) = xb'(x) &= \frac{x((1-x)^3(1+2x) + 3x(1+x)(1-x)^2)}{(1-x)^6} \\ &= \frac{x((1-x)(1+2x) + 3x + 3x^2)}{(1-x)^4} = \frac{x(x^2 + 4x + 1)}{(1-x)^4} \leftrightarrow \\ &(c_n), c_n = n^3. \end{aligned}$$

Po úpravě lze ověřit, že tyto výsledky jsou s předchozími shodné. Mohlo by se zdát, že druhá metoda je jednodušší, nicméně tvar funkce získaný prvním

postupem pro nás bude výhodný v kapitole 3.2., kde budeme odvozovat součtové vzorce těchto řad.

Vytvořující funkce některých zajímavých posloupností můžeme získat též z Taylorova rozvoje známých funkcí.

Definice 2.2.2. V případě existence derivací všech řádů funkce $a(x)$ v bodě x_0 lze Taylorovu řadu zapsat jako

$$\begin{aligned} T(x) &= a(x_0) + \frac{a'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{a''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \frac{a^{(3)}(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \end{aligned}$$

Příklad 2.2.11. Taylorův rozvoj funkce $a(x) = e^x$ v bodě $x_0 = 0$.

$$a(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ pro } x \in \mathbf{R} \leftrightarrow (a_n), a_n = \frac{1}{n!}.$$

Příklad 2.2.12. Taylorův rozvoj funkce $a(x) = \sin x$ v bodě $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned} a(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in \mathbf{R} \\ &\leftrightarrow (a_n) = \left(0, 1, 0, -\frac{1}{3!}, 0, \frac{1}{5!}, 0, -\frac{1}{7!}, \dots\right). \end{aligned}$$

Příklad 2.2.13. Taylorův rozvoj funkce $a(x) = \cos x$ v bodě $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned} a(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, x \in \mathbf{R} \\ &\leftrightarrow (a_n) = \left(1, 0, -\frac{1}{2!}, 0, \frac{1}{4!}, 0, -\frac{1}{6!}, \dots\right). \end{aligned}$$

Příklad 2.2.14. Taylorův rozvoj funkce $a(x) = \ln(1+x)$.

$$\begin{aligned} a(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, x \in (-1, 1) \leftrightarrow (a_n), a_n \\ &= (-1)^{n+1} \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, a_0 = 0. \end{aligned}$$

Protože v následující kapitole budeme mnohé ze zde spočítaných vytvářejících funkcí využívat v příkladech, uveďme si na závěr této kapitoly, ještě jejich přehled vč. definičních oborů.

Poznámka: V přehledu je u všech předpisů pro posloupnosti $n \in \mathbb{N}_0$.

Přehled posloupností a jejich vytvořujících funkcí

Posloupnost	Vytv. funkce	Definiční obor
$(a_n), a_n = 1$	$a(x) = \frac{1}{1-x}$	$(-1, 1)$
$(a_n), a_n = c, c \in \mathbf{R}$	$a(x) = \frac{c}{1-x}$	$(-1, 1)$
$(a_n), a_n = (-1)^n$	$a(x) = \frac{1}{1+x}$	$(-1, 1)$
$(a_n), a_n = q^n, q \in \mathbf{R}$	$a(x) = \frac{1}{1-qx}$	$\left(-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)$
$(a_n), a_n = n$	$a(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$	$(-1, 1)$
$(a_n), a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1, a_0 = 0$	$a(x) = -\ln(1-x)$	$(-1, 1)$
$(a_n), a_n = 2n + 1$	$a(x) = \frac{1+x}{(1-x)^2}$	$(-1, 1)$
$(a_n), a_n = n^2$	$a(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$	$(-1, 1)$
$(a_n), a_n = n^3$	$a(x) = \frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4}$	$(-1, 1)$
$(a_n), a_n = \frac{1}{n!}$	$a(x) = e^x$	\mathbf{R}
$(a_n) = (0, 1, 0, -\frac{1}{3!}, 0, \frac{1}{5!}, \dots)$	$a(x) = \sin x$	\mathbf{R}
$(a_n) = (1, 0, -\frac{1}{2!}, 0, \frac{1}{4!}, \dots)$	$a(x) = \cos x$	\mathbf{R}
$(a_n), a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n},$ $n \in \mathbf{N}, a_0 = 0$	$a(x) = \ln(1+x)$	$(-1, 1)$
$(a_k), a_k = \binom{n}{k}, k = 0, 1, \dots, n,$ $a_k = 0$ pro $k > n,$ $n \in \mathbf{N}$ pevné	$a(x) = (1+x)^n$	\mathbf{R}

3. Aplikace vytvářících funkcí

Tato kapitola bude tvořit nejrozsáhlejší část naší práce. Předchozí teorii jsme samozřejmě nerozvíjeli nadarmo, výsledky, jichž jsme dosáhli, zde výhodně využijeme.

3.1. Úlohy o posloupnostech

Na tomto místě nás čeká řešení rekurentních vztahů. Znalosti, které nabydeme, se nám budou hodit ve druhé části, kde se setkáme se známou posloupností Fibonacciho čísel. To vše samozřejmě za použití vytvářících funkcí.

3.1.1. Rekurentní vztahy

Jak jsme již zmínili v úvodu, posloupnost může být zadána buď explicitním vzorcem nebo rekurentně, kdy udáváme vztah pro daný člen pomocí členů předcházejících za určitých, tzv. počátečních podmínek. Druhá varianta však skýtá nevýhodu v pracnosti výpočtu jednotlivých členů dané posloupnosti, kdy bychom museli postupovat po jednotlivých členech. V této kapitole si tedy na příkladech různých typů ukážeme, jak za pomoci vytvářících funkcí převést rekurentní vyjádření posloupnosti na její explicitní tvar.

Příklad 3.1.1. Mějme posloupnost (zadanou rekurentně)

$$a_{n+1} = 3a_n - 4$$

s počáteční podmínkou $a_0 = 1$.

Spočítejme pomocí vytvářících funkcí explicitní vzorec pro n -tý člen této posloupnosti.

Nejprve si všechny členy vynásobíme x^n a sečteme $\forall n$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3a_nx^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4x^n.$$

Podle vlastnosti (4) určíme vytvářící funkce pro každý člen této rovnice, následně pak vyjádříme vytvářící funkci $a(x)$ pro zadanou posloupnost (a_n) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}(a(x) - a_0) &= 3a(x) - \frac{4}{1-x} \\ a(x) - 3a(x)x &= \frac{-4x}{1-x} + a_0 \\ a(x) &= \frac{-4x}{(1-x)(1-3x)} + \frac{a_0}{1-3x}.\end{aligned}$$

První zlomek rozložíme na parciální zlomky, do druhého doplníme počáteční podmínku:

$$\frac{-4x}{(1-x)(1-3x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-3x},$$

kde $A = 2$, $B = -2$. Dostáváme tak

$$a(x) = \frac{2}{1-x} - \frac{2}{1-3x} + \frac{1}{1-3x} = \frac{2}{1-x} - \frac{1}{1-3x}.$$

Z předchozího víme, že $b(x) = \frac{2}{1-x} \leftrightarrow (b_n)$, $b_n = 2$,

$$c(x) = \frac{1}{1-3x} \leftrightarrow (c_n), c_n = 3^n.$$

Dostáváme tak vyjádření n -tého členu zadané posloupnosti:

$$a_n = 2 - 3^n, n \in N_0.$$

Příklad 3.1.2. Najděme explicitní vyjádření n -tého členu posloupnosti (a_n) zadané vztahem

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$$

s počátečními podmínkami $a_0 = 2$, $a_1 = 3$.

Vytvořující funkce pro jednotlivé členy budou

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 5a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 6a_nx^n.$$

Podle vlastnosti (4) je

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2}(a(x) - a_0 - a_1x) &= \frac{5}{x}(a(x) - a_0) - 6a(x) \\ a(x) - 5a(x)x + 6a(x)x^2 &= 2 - 7x \\ a(x) &= \frac{2-7x}{1-5x+6x^2} = \frac{1}{3x-1} - \frac{3}{2x-1} = 3\frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-3x}.\end{aligned}$$

Odsud je tedy hledaný vzorec

$$a_n = 3 \cdot 2^n - 3^n.$$

Příklad 3.1.3. Najděme explicitní vzorec pro n -tý člen posloupnosti (a_n) zadané vztahem

$$a_{n+1} = 2a_n + 3n$$

za poč. podmínky $a_0 = 0$.

Vynásobíme x^n a sečteme pro všechna n :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 3 \sum_{n=0}^{\infty} nx^n \\ \frac{1}{x}(a(x) - a_0) &= 2a(x) + 3 \frac{x}{(1-x)^2} \\ a(x) &= \frac{3x^2}{(1-x)^2(1-2x)} = \frac{3}{1-2x} - \frac{3}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Což dává hledaný vzorec

$$a_n = 3 \cdot 2^n - 3(n+1).$$

3.1.2. Fibonacciho čísla

Na této známé posloupnosti si předvedeme i jiný možný způsob nalezení vytvořující funkce. Dále ukážeme, že pomocí vytvořujících funkcí můžeme dokazovat i některé vlastnosti posloupností.

Fibonacciho čísla jsou tvořeny rekurentním vztahem

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

pro $n \geq 2$ a počátečními podmínkami $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.

Formální vytvořující řada Fibonacciho čísel je tedy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n.$$

Tedy

$$\begin{array}{lcl} f(x) & = & F_0 x^0 + F_1 x^1 + F_2 x^2 + \dots + F_i x^i + \dots \\ & \dots & / \cdot x \\ xf(x) & = & F_0 x^1 + F_1 x^2 + \dots + F_{i-1} x^i + \dots \\ & \dots & / \cdot x \end{array}$$

$$\begin{aligned}
x^2 f(x) &= F_0 x^2 + \dots + F_{i-2} x^i + \dots \\
(x+x^2)f(x) &= F_0 x^1 + (F_0+F_1)x^2 + \dots + (F_{i-1}+F_{i-2})x^i + \dots \\
&= F_2 x^2 + \dots + F_i x^i + \dots
\end{aligned}$$

Dostáváme tak

$$f(x) = xf(x) + x^2 f(x) + F_0 x^0 + F_1 x^1 = xf(x) + x^2 f(x) + x \text{ (neboť } F_0 = 0, \text{ viz def.)}.$$

Odtud

$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

Lze dokázat, že $f(x)$ lze napsat ve tvaru

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1-\varphi_1 x} - \frac{1}{1-\varphi_2 x} \right),$$

kde

$$\varphi_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Podle vlastnosti (5) tak máme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi_1^n - \varphi_2^n) x^n,$$

a tak dostáváme explicitní vzorec pro n -tý člen Fibonacciho posloupnosti

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi_1^n - \varphi_2^n).$$

Fibonacciho čísla mají některé zajímavé vlastnosti, z nichž některé si na následujících řádcích pomocí vytvořujících funkcí dokážeme:

Příklad 3.1.4. Dokažme, že platí $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$.

Označme si

$$a_n = \sum_{k=0}^n F_k$$

jako součet prvních n Fibonacciho čísel. Pak tedy podle vlastnosti (8) je

$$(a_n) \leftrightarrow a(x) = \frac{x}{(1-x-x^2)(1-x)}.$$

Pro pravou stranu našeho vztahu máme dle vlastnosti (4):

$$b(x) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{x}{1-x-x^2} - x \right) - \frac{1}{1-x},$$

což si nyní upravíme:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} \left(\frac{x}{1-x-x^2} - x \right) - \frac{1}{1-x} &= \frac{1+x}{(1-x-x^2)} - \frac{1}{1-x} = \frac{1-x^2 - (1-x-x^2)}{(1-x-x^2)(1-x)} \\ &= \frac{x}{(1-x-x^2)(1-x)}, \end{aligned}$$

čímž jsme daný vztah dokázali.

Příklad 3.1.5. Dokažte, že platí $F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n+1} = F_{2n+2}$.

Utvořme si nejprve vytvořující funkce pro obě strany rovnice:

$$a_n = \sum_{k=0}^n F_{2k+1}.$$

K nalezení vytvořující funkce pro tento součet si nejprve odvodíme vztahy mezi lichými členy Fibonacciho čísel a následně jejich vytvořující funkci:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n = F_{2n+1} &= F_{2n} + F_{2n-1} = F_{2n-1} + F_{2n-2} + F_{2n-1} \\ &= 2(F_{2n-2} + F_{2n-3}) + F_{2n-2} = 3(F_{2n-1} - F_{2n-3}) + F_{2n-3} \\ &= 3F_{2n-1} - F_{n-3}, \end{aligned}$$

což dává rekurentní vztah

$$\tilde{a}_n = 3\tilde{a}_{n-1} - \tilde{a}_{n-2}, \text{ tj. } \tilde{a}_{n+2} = 3\tilde{a}_{n+1} - \tilde{a}_n$$

s poč. podmínkami $\tilde{a}_0 = 1, \tilde{a}_1 = 2$.

Jako obvykle tedy vynásobíme všechny členy rovnice x^n a $\forall x$ sečteme:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^n &= 3 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \\ \frac{1}{x^2} (\tilde{a}(x) - \tilde{a}_0 - \tilde{a}_1x) &= \frac{3}{x} (\tilde{a}(x) - \tilde{a}_0) - \tilde{a}(x) \\ \tilde{a}(x)(1 - 3x + x^2) &= 1 - x \\ \tilde{a}(x) &= \frac{1-x}{1-3x+x^2} \end{aligned}$$

a podle vlastnosti (8) je tak

$$a(x) = \frac{1}{1 - 3x + x^2}.$$

Abychom získali vytvořující funkci pro pravou stranu, zavedme si nejprve posloupnost

$$b_n = F_{2n}.$$

Zde potřebujeme nejprve odvodit vztahy mezi sudými členy Fibonacciho posloupnosti, což nám opět dá rekurentní vztah, ze kterého získáme vytvořující funkci pro danou posloupnost:

$$\begin{aligned} b_n = F_{2n} &= F_{2n-1} + F_{2n-2} = F_{2n-2} + F_{2n-3} + F_{2n-2} = 2F_{2n-2} + F_{2n-2} - F_{2n-4} \\ &= 3F_{2n-2} - F_{2n-4}. \end{aligned}$$

což dává rekurentní vztah

$$b_n = 3b_{n-1} - b_{n-2}, \text{ resp. } b_{n+2} = 3b_{n+1} - b_n$$

s počátečními podmínkami $b_0 = 0, b_1 = 1$.

Pak tedy

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+2} x^n &= 3 \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \\ \frac{1}{x^2} (b(x) - b_0 - b_1 x) &= \frac{3}{x} (b(x) - b_0) - b(x) \\ b(x)(1 - 3x + x^2) &= x \\ b(x) &= \frac{x}{1 - 3x + x^2}. \end{aligned}$$

Pro získání vytvořující funkce posloupnosti F_{2n+2} musíme podle vlastnosti (4) ještě učinit jednoduchou úpravu:

$$\frac{1}{x} (b(x) - b_0) = \frac{1}{1 - 3x + x^2},$$

což dává stejný výsledek, jako na levé straně a tím je rovnost ověřena.

Příklad 3.1.6. Dokažte, že platí $F_0 + F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$.

Označme si

$$a_n = \sum_{k=0}^n F_{2k}.$$

a vytvořující funkci této posloupnosti

$$(a_n) \leftrightarrow a(x) = \frac{x}{1-3x+x^2} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-3x+x^2)(1-x)}.$$

Dále si označme

$$b_n = F_{2n+1}.$$

a její vytvořující funkci

$$(b_n) \leftrightarrow b(x) = \frac{1-x}{1-3x+x^2}.$$

Pak na pravé straně dostáváme

$$\frac{1-x}{1-3x+x^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{1-2x+x^2 - (1-3x+x^2)}{(1-3x+x^2)(1-x)} = \frac{x}{(1-3x+x^2)(1-x)},$$

čímž je daná rovnost ověřena.

Poznámka: Všechny uvedené vztahy lze samozřejmě dokázat i jinými způsoby, například přímo z rekurentních vztahů nebo matematickou indukcí.

3.2. Součtové vzorce

Použití vytvořujících funkcí je jedna z metod, jak získat explicitní vyjádření některých součtových vzorců, což si ukážeme v této kapitole. K tomu bude potřeba odvodit následující vztah, jak je uvedeno v [9]:

Nejprve ozn.: $[x^k]$, jako koeficient u k -té mocniny x , tedy a_k .

Vyjdeme z posloupnosti

$$(a_n), a_n = (1+x)^n = (1, (1+x), (1+x)^2, (1+x)^3, \dots).$$

Zavedme navíc jednu proměnnou, např. y . Podle (5) platí

$$\frac{1}{1-cx} = 1 + cx + c^2x^2 + c^3x^3 + \dots$$

Zavedením proměnné y a substitucí $c = 1+x$ dostaneme

$$1 + (1+x)y + (1+x)^2y^2 + (1+x)^3y^3 + \dots = \frac{1}{(1-(1+x)y)}.$$

Hledejme koeficient u x^k :

$$[x^k] \frac{1}{1-(1+x)y} = \frac{1}{1-y} \cdot [x^k] \frac{1}{1-\frac{xy}{1-y}} = \frac{1}{1-y} \cdot \left(\frac{y}{1-y}\right)^k = \frac{y^k}{(1-y)^{k+1}}.$$

Koeficient $(1+x)^i$ si můžeme nahradit podle binomické věty a dostaneme

$$\frac{1}{1 - (1+x)y} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n C(n, k) x^k y^n,$$

odkud

$$[x^k] \frac{1}{1 - (1+x)y} = \sum_{n=k}^{\infty} C(n, k) y^n.$$

Odtud dostáváme následující vztah:

$$\sum_{n=k}^{\infty} C(n, k) y^n = \frac{y^k}{(1-y)^{k+1}},$$

který si samozřejmě pro potřeby pozdějšího užití můžeme přepsat na

$$\sum_{n=k}^{\infty} C(n, k) x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}. \quad (1)$$

Příklad 3.2.1. Odvodíme vzorec pro

$$\sum_{k=0}^n k.$$

Vytvořující funkce pro posloupnost (a_n) , $a_n = n$ je

$$\frac{x}{(1-x)^2},$$

z čehož podle (8) vyplývá, že vytvořující funkce pro posloupnost částečných součtů s_n , $(n = 0, 1, 2, \dots)$ je

$$\frac{x}{(1-x)^3}.$$

Hledáme koeficient u n -té mocniny. Položme $k = 2$ do vztahu (1) a dostaneme

$$\frac{x}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} C(n, 2) x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} C(n+1, 2) x^n.$$

Hledaný koeficient tedy bude

$$C(n+1, 2) = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Vzorec, který jsme hledali, je tak

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Příklad 3.2.2. Odvoďme vzorec pro

$$\sum_{k=0}^n k^2.$$

Vytvořující funkce pro posloupnost (a_n) , $a_n = n^2$ je

$$\frac{2x}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Vytvořující funkce pro posloupnost součtů posloupnosti (a_n) , tedy posloupnost $(0, 1, 5, 14, \dots)$ je tak podle (8)

$$\frac{2x}{(1-x)^4} - \frac{x}{(1-x)^3}.$$

Do vztahu (1) dosadíme postupně $k = 3$, $k = 2$:

$$\frac{2x^3}{(1-x)^4} - \frac{x^2}{(1-x)^3} = 2 \sum_{n=3}^{\infty} C(n, 3)x^n - \sum_{n=2}^{\infty} C(n, 2)x^n.$$

Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} \frac{2x}{(1-x)^4} - \frac{x}{(1-x)^3} &= 2 \sum_{n=3}^{\infty} C(n, 3)x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} C(n, 2)x^{n-1} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} C(n+2, 3)x^n - \sum_{n=1}^{\infty} C(n+1, 2)x^n \end{aligned}$$

koeficient u x^n je pak

$$2C(n+2, 3) - C(n+1, 2).$$

Po jednoduchém výpočtu dostaneme

$$2 \binom{n+2}{3} - \binom{n+1}{2} = 2 \frac{(n+2)(n+1)n}{6} - \frac{(n+1)n}{2} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}.$$

Výsledný vzorec je tedy

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}.$$

Příklad 3.2.3. Odvoďme vzorec pro

$$\sum_{k=0}^n k^3.$$

Vytvořující funkce pro posloupnost (a_n) , $a_n = n^3$ je

$$\frac{6x}{(1-x)^4} - \frac{6x}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Vytvořující funkce pro posloupnost součtů posloupnosti (a_n) je tedy podle vlastnosti (8) zřejmě

$$\frac{6x}{(1-x)^5} - \frac{6x}{(1-x)^4} + \frac{x}{(1-x)^3}.$$

Do vztahu (1) dosadíme postupně $k = 4$, $k = 3$, $k = 2$:

$$\begin{aligned} & \frac{6x^4}{(1-x)^5} - \frac{6x^3}{(1-x)^4} + \frac{x^2}{(1-x)^3} \\ &= 6 \sum_{n=4}^{\infty} C(n, 4)x^n - 6 \sum_{n=3}^{\infty} C(n, 3)x^n + \sum_{n=2}^{\infty} C(n, 2)x^n. \end{aligned}$$

Dostaneme tak

$$\begin{aligned} & \frac{6x}{(1-x)^5} - \frac{6x}{(1-x)^4} + \frac{x}{(1-x)^3} \\ &= 6 \sum_{n=4}^{\infty} C(n, 4)x^{n-3} - 6 \sum_{n=3}^{\infty} C(n, 3)x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} C(n, 2)x^{n-1} \\ &= 6C(n+3, 4)x^n - 6C(n+2, 3)x^n + C(n+1, 2)x^n. \end{aligned}$$

Zjistíme koeficient u x^n , tedy

$$\begin{aligned} & 6 \binom{n+3}{4} - 6 \binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{2} \\ &= \frac{6(n+3)(n+2)(n+1)n}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} - \frac{6(n+2)(n+1)n}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{(n+1)n}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{n^2(n^2 + 2n + 1)}{4}. \end{aligned}$$

Hledaný vzorec je tedy

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n^2 + 2n + 1)}{4}.$$

Pozn.: Podobným způsobem lze samozřejmě počítat součty dalších mocnin přirozených čísel.

Příklad 3.2.4. Najděme vzorec pro n -tý člen součtu

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k k^2.$$

Utvoříme si nejprve vytvářející funkce pro posloupnosti $(a_k), a_k = k^2$, $(b_k), b_k = (-1)^k$. Z předchozího textu víme, že

$$(a_k) \leftrightarrow a(x) = \frac{2x}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}, (b_k) \leftrightarrow b(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Využijeme toho, že

$$(-1)^{n-k} = \frac{(-1)^n}{(-1)^k} = (-1)^n (-1)^k.$$

Dále podle vlastnosti (10) je

$$\begin{aligned} a(x)b(x) &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{x}{(1-x)^3} = x + 3x^2 + 6x^3 + 10x^4 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n. \end{aligned}$$

Dosadíme do vzorce (1) a dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{x}{(1-x)^3} &= \sum_{n=2}^{\infty} C(n, 2) x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} C(n+1, 2) x^n \\ C(n+1, 2) &= \frac{(n+1)n}{2}. \end{aligned}$$

Hledaný vzorec tedy bude

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{(n+1)n}{2}.$$

Pozn.: Obdobně bychom postupovali při počítání explicitního vzorce

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k k^3.$$

V této kapitole jsme tedy ukázali, že odvození některých součtových vzorců pomocí vytvořujících funkcí je poměrně snadná, v podstatě jen technická záležitost. Zjevnou nevýhodou této metody ovšem je, že nemusí být vždycky snadné najít potřebný $(n-k)$ -tý člen posloupnosti, která se v součtu objeví.

3.3. Řešení lineárních diferenčních rovnic

Diferenční (někdy též rekurzivní) rovnice jsou takové rovnice, kde hledáme vzorec pro n -tý člen posloupnosti čísel splňující jistý daný vztah. Najdeme-li takový vzorec, říkáme, že jsme vyřešili danou diferenční rovnici. Cílem této kapitoly bude ukázat, jak takový vzorec najít pomocí vytvořujících funkcí.

3.3.1. Základní pojmy

Definice 3.3.1. (diference posloupnosti): Mějme posloupnost (y_n) . Číslo

$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$ se nazývá *diference posloupnosti* (y_n) v bodě $n \in \mathbf{N}_0$.

Definice 3.3.2. (lineární diferenční rovnice): Rovnice

$$y_{n+k} + c_1 y_{n+k-1} + \dots + c_k y_n = b_n \quad (1)$$

pro $c_k \neq 0$ se nazývá *lineární diferenční rovnice k -tého řádu* s konstantními koeficienty. Jejím řešením je každá posloupnost $(y_n)_{n=0}^{\infty}$, která vyhovuje této rovnici (tato rovnice se nazývá *lineární*, protože v rovnici se vyskytuje pouze lineární kombinace členů hledané posloupnosti). Posloupnosti $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ říkáme *pravá strana diferenční rovnice*.

Rovnicí (1) ovšem není jednoznačně dáno její řešení. K tomu, aby existovala jediná posloupnost splňující danou rovnici, musíme ještě zadat tzv. *počáteční podmínky*, tj. hodnoty prvních k členů hledané posloupnosti.

3.3.2. Homogenní diferenční rovnice

Definice 3.3.3. V případě, že v rovnici (1) je posloupnost $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ nulová, tj. $\forall n$ platí $b_n = 0$, nazývá se tato rovnice *homogenní lineární diferenční rovnice* (někdy též *rovnice bez pravé strany*).

Tyto rovnice se obvykle řeší pomocí metod diferenčního počtu, které využívají následující definici a větu:

Definice 3.3.4. (charakteristická rovnice): Rovnice

$$x^k + c_1 x^{k-1} + \dots + c_{k-1} x + c_k = 0$$

se nazývá *charakteristická rovnice* homogenní diferenční rovnice.

Věta 3.3.1. Jestliže číslo λ je r -násobný reálný kořen charakteristické rovnice, pak posloupnosti $(\lambda^n)_{n=0}^{\infty}$, $(n\lambda^n)_{n=0}^{\infty}$, ..., $(n^{r-1}\lambda^n)_{n=0}^{\infty}$ jsou lineárně nezávislá řešení dané homogenní diferenční rovnice. Každé řešení homogenní lineární diferenční rovnice je pak lineární kombinací všech lineárně nezávislých řešení.

My však na tomto místě ukážeme jiný postup, jak lze danou diferenční rovnici řešit. Stanovíme si vytvořující funkce pro každý člen dané rovnice, vyjádříme si pak na levé straně $y(x)$ a daný výsledek převedeme zpět na posloupnost.

Příklad 3.3.1. Najděme řešení diferenční rovnice

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0$$

pro poč. podmínky $y_0 = 1, y_1 = 0$.

Celou rovnici vynásobíme x^n a sečteme pro všechna n , což nám dá vytvořující funkce pro jednotlivé členy dané rovnice:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+2} x^n - 3 \sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1} x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n = 0.$$

což podle vlastnosti (4) dává

$$\frac{1}{x^2} (y(x) - 1) - \frac{3}{x} (y(x) - 1) + 2y(x) = 0.$$

zbývá vyjádřit funkci $y(x)$:

$$y(x) - 1 - 3x(y(x) - 1) + 2x^2 y(x) = 0,$$

$$y(x) = \frac{1-3x}{(2x-1)(x-1)}.$$

Po rozkladu na parciální zlomky dostaneme

$$y(x) = \frac{1}{2x-1} - \frac{2}{x-1} = \frac{2}{1-x} - \frac{1}{1-2x}.$$

Podle známých vytvořujících funkcí tak již můžeme dostat hledaný vzorec,

$$y_n = 2 - 2^n.$$

3.3.3. Nehomogenní dif. rovnice se speciální pravou stranou

Jedná se zde tedy o rovnice, jejichž pravá strana je nenulová, nicméně je pro výpočet přijatelná. Tento typ rovnic se standardně řeší přes diferenční počet, jehož teorie je velmi obsáhlá. My si zde pro srovnání tento výpočet také předvedeme a následně ukážeme, jak stejný příklad řešit pomocí vytvořujících funkcí.

Definice 3.3.5. Je-li v rovnici (1) posloupnost $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ nenulová, nazývá se tato rovnice *nehomogenní lineární diferenční rovnice*. Jestliže v této rovnici „vynulujeme“ její pravou stranu, získáme k ní *přidruženou homogenní diferenční rovnici*.

Věta 3.3.2. Je-li pravá strana nehomogenní lineární diferenční rovnice ve tvaru $b_n = P(n)\lambda^n$, kde P je polynom, pak jedno konkrétní řešení dané rovnice odhadujeme ve tvaru:

1. $y_{pn} = Q(n)\lambda^n$, jestliže λ není kořen charakteristické rovnice.
2. $y_{pn} = n^k Q(n)\lambda^n$, jestliže λ je k -násobný kořen charakteristické rovnice.

V obou těchto případech je Q polynom stejného stupně jako P , ale s obecnými koeficienty.

Věta 3.3.3. Výsledné řešení nehomogenní lineární diferenční rovnice je ve tvaru

$$y_n = y_{hn} + y_{pn}.$$

Příklad 3.3.2. Najděme řešení diferenční rovnice

$$y_{n+2} - 4y_n = 2^n$$

pro počáteční podmínky $y_0 = 0$, $y_1 = 0$.

Srovnáme si tedy nyní dva možné způsoby výpočtu této diferenční rovnice, začneme tradiční metodou:

a) Řešení dle teorie diferenčního počtu:

Nejprve vyřešíme přidruženou homogenní diferenční rovnici

$$y_{n+2} - 4y_n = 0.$$

K jejímu vyřešení budeme potřebovat vyřešit tzv. charakteristickou rovnici.

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

a její kořeny

$$\lambda_{1,2} = \pm 2,$$

což nám dává řešení naší přidružené homogenní dif. rovnice

$$y_{hn} = c_1 2^n + c_2 (-2)^n.$$

Nyní metodou odhadu pro pravou stranu potřebujeme získat jedno řešení dané nehomogenní rovnice.

V našem případě je z věty 3.3.2 zřejmě $P = 1$, $\lambda = 2$, tedy je 1-násobný kořen charakteristické rovnice. Proto $y_{pn} = n \cdot a \cdot 2^n$.

Dosazením tohoto řešení spolu s počátečními podmínkami do zadané rovnice vznikne rovnice o třech neznámých a, c_1, c_2 , kterou vyřešíme a dostaneme tak hledané řešení:

$$c_1 \cdot 2^0 + c_2 (-2)^0 = 0,$$

$$c_1 \cdot 2 + c_2 (-2)^1 + 2a = 0,$$

$$(n+2) \cdot a \cdot 2^{n+2} - 4n \cdot a \cdot 2^n = 2^n.$$

Ze třetí rovnice je rovnou $a = \frac{1}{8}$, což po doplnění do prvních dvou rovnic dává

$$c_1 = -\frac{1}{16}, c_2 = \frac{1}{16}.$$

Naším řešením je tak dle věty 3.3.3

$$y_n = -\frac{1}{16} 2^n + \frac{1}{16} (-2)^n + n \frac{1}{8} 2^n = 2^n \left(\frac{-1 + (-1)^n + 2n}{16} \right).$$

I tyto rovnice však lze samozřejmě řešit pomocí vytvořujících funkcí, a to podobným postupem jako rovnice homogenní:

b) Najdeme řešení stejné diferenční rovnice pomocí vytvořujících funkcí, tedy znovu

$$y_{n+2} - 4y_n = 2^n$$

pro počáteční podmínky $y_0 = 0, y_1 = 0$.

Vynásobíme x^n a sečteme $\forall n$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+2} x^n - 4 \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n.$$

Spočítáme vytvořující funkce pro jednotlivé členy rovnice a dostaneme

$$\frac{1}{x^2} (y(x) - a_0 - a_1 x) - 4y(x) = \frac{1}{1-2x}.$$

Po dosazení počátečních podmínek a jednoduchých úpravách máme

$$y(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2(1+2x)} = -\frac{\frac{3}{16}}{1-2x} + \frac{\frac{1}{8}}{(1-2x)^2} + \frac{\frac{1}{16}}{1+2x}.$$

Zbývá určit posloupnosti, které nám jednotlivé členy určují. Pro první a třetí člen je již známe, druhý člen musíme spočítat, otázka tedy zní, jakou posloupnost vytváří funkce

$$\frac{\frac{1}{8}}{(1-2x)^2}.$$

Zde vyjdeme z posl. $(a_n), a_n = 2^n$ a tedy

$$a(x) = \frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n \leftrightarrow (a_n).$$

Derivace je

$$a(x)' = \frac{2}{(1-2x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) 2^{n+1} x^n \leftrightarrow (b_n),$$

kde $(b_n), b_n = (n+1) 2^{n+1}$.

Hledaná posloupnost je tedy

$$\begin{aligned} y_n &= -\frac{3}{16}2^n + (-1)^n \frac{1}{16}2^n + \frac{1}{8}(n+1)2^n = 2^n \left(-\frac{3}{16} + (-1)^n \frac{1}{16} + \frac{n+1}{8} \right) \\ &= 2^n \left(\frac{-1 + (-1)^n + 2n}{16} \right), \end{aligned}$$

což je samozřejmě stejné řešení jako v předchozím případě.

Povšimněme si několika rozdílů mezi oběma metodami řešení této diferenční rovnice. Zatímco v prvním případě jsme nejprve museli vyřešit homogenní rovnici, abychom se posunuli dále, při řešení přes vytvořující funkce počítáme rovnou také s pravou stranou. Též počáteční podmínky při řešení pomocí vytvořujících funkcí „vstupují do hry“ prakticky hned od začátku, kdežto v prvním případě až později. Při řešení diferenční rovnice klasickou metodou se dostaneme též k řešení rovnic o několika neznámých, kdežto u vytvořujících funkcí se obvykle dostaneme k rozkladu na parciální zlomky. Drobnou nevýhodou řešení přes vytvořující funkce je to, že musíme umět zpětně nalézt posloupnost k výsledné vytvořující funkci, což obecně nemusí být vůbec snadná záležitost. Pracnost obou přístupů je zde víceméně stejná.

3.3.4. Homogenní dif. rovnice s nekonstantními koeficienty

Samozřejmě, že koeficienty u posloupností v diferenčních rovnicích nemusí být nutně konstantní. V takovém případě bychom s řešením pomocí charakteristické rovnice neuspěli. Přesto máme po ruce velmi kvalitní nástroj, jak někdy takové rovnice, které konstantní koeficienty neobsahují, spočítat. Tímto nástrojem jsou samozřejmě vytvořující funkce. Na příkladu ukážeme zajímavý postup, jak se k řešení diferenční rovnice dostáváme pomocí jednoduché rovnice diferenciální.

Příklad 3.3.3. Najděme řešení diferenční rovnice

$$y_{n+1} - \frac{2}{3n+3}y_n = 0$$

pro počáteční podmínku $y_0 = 1$.

Pro druhý člen naší rovnice bychom hledali vytvořující funkci poměrně složitě, proto se nejdříve zbavíme zlomku:

$$3(n+1)y_{n+1} - 2y_n = 0.$$

Pak tedy podle vlastnosti (7) máme

$$3y'(x) - 2y(x) = 0$$

s počáteční hodnotou vytvořující funkce $y(0) = 1$,

což je klasická diferenciální rovnice, kterou snadno vyřešíme metodou separace proměnných:

$$3y' = 2y,$$

$$\frac{3\partial y}{\partial x} = 2y,$$

$$\frac{\partial y}{y} = \frac{2\partial x}{3}, y \neq 0,$$

$$\ln|y| = \frac{2x}{3} + C,$$

$$|y| = e^{\frac{2}{3}x+C}.$$

Úpravou získáme obecné řešení rovnice

$$y = Ke^{\frac{2}{3}x}, K \neq 0.$$

Přidáním singulárního řešení $y = 0$ dostáváme všechna řešení rovnice ve tvaru

$$y = Ke^{\frac{2}{3}x}, K \in \mathbb{R}.$$

Dosazením počáteční podmínky dostaneme $K = 1$ a tedy máme

$$y = e^{\frac{2}{3}x}.$$

Taylorův rozvoj této funkce je

$$e^{\frac{2}{3}x} = 1 + \frac{2}{3}x + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2!}x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!3^n}x^n,$$

což dává hledanou posloupnost

$$y_n = \frac{2^n}{n!3^n}.$$

Protože jsme pro řešení této diferenční rovnice použili dosti netypický postup, ověříme si ještě správnost řešení zkouškou:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{2^{n+1}}{(n+1)! 3^{n+1}} - \frac{2}{3n+3} \cdot \frac{2^n}{n! 3^n} = 2 \frac{2^n}{3(n+1)n! 3^n} - \frac{2}{3n+3} \cdot \frac{2^n}{n! 3^n} \\
&= \frac{2}{3n+3} \cdot \frac{2^n}{n! 3^n} - \frac{2}{3n+3} \cdot \frac{2^n}{n! 3^n} = 0 = P.
\end{aligned}$$

Výsledná posloupnost vyhovuje i zadané počáteční podmínce $y_0 = 1$.

3.3.5. Nehomogenní dif. rovnice s nespeciální pravou stranou

V kapitole 3.3.3. jsme si ukázali výpočet diferenčních rovnic, které měly na své pravé straně pro daný výpočet přijatelně vypadající posloupnost. Nyní na tomto místě předvedeme, že vytvářející funkce nám umožňují spočítat i takové diferenční rovnice, které na své pravé straně mají posloupnost, která na první pohled nemusí nutně být „hezky vypadající“, což je další případ diferenčních rovnic, které nelze řešit pomocí charakteristické rovnice. Při tomto postupu potřebujeme často najít vhodné vyjádření vytvářející funkce k součinu mocninných řad, a proto může vyjít výsledné řešení ve tvaru součtu n , popřípadě $(n+1)$ členů.

Příklad 3.3.4. Najděme řešení diferenční rovnice

$$y_{n+1} - 2y_n = \frac{1}{n+2}$$

pro počáteční podmínku $y_0 = 0$:

Rovnici vynásobíme x^n a sečteme $\forall n$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1} x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} x^n,$$

což dává vytvářející funkce pro jednotlivé členy rovnice:

$$\frac{1}{x} (y(x) - y_0) - 2y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} x^n.$$

Po roznásobení a dosazení poč. podmínky dostáváme vytvářející funkci pro námi hledanou posloupnost:

$$y(x) - y_0 - 2xy(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} x^{n+1},$$

$$y(x)(1-2x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} x^{n+1},$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} x^{n+1} \cdot \frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} x^{n+1} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n.$$

Pro první činitel je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n \right) - 1,$$

čímž dostáváme

$$\begin{aligned} & \left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n \right) - 1 \right) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} x^k 2^{n-k} x^{n-k} - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} 2^{n-k} - 2^n \right) x^n, \end{aligned}$$

což dává námi hledanou posloupnost

$$y_n = \sum_{k=0}^n \frac{2^{n-k}}{k+1} - 2^n.$$

Příklad 3.3.5. Najděme řešení diferenční rovnice

$$y_{n+1} - 3y_n = \frac{1}{n!}$$

pro počáteční podmínku $y_0 = 0$.

Jako obvykle vynásobíme x^n a sečteme $\forall n$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1} x^n - 3 \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Pro každý člen posloupnosti uděláme vytvořující funkci:

$$\frac{1}{x} (y(x) - y_0) - 3y(x) = e^x,$$

kde po roznásobení a dosazení poč. podmínky dostaneme vyjádření vytvořující funkce pro hledanou posloupnost:

$$y(x) = \frac{x e^x}{1-3x} = x e^x \frac{1}{1-3x}.$$

Tento výsledek si můžeme vhodně rozepsat jako součin dvou mocninných řad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n+1} \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n,$$

kde si ještě prvního činitele musíme upravit:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(n+1)!} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n$$

a dostaneme tak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{k}{k!} x^k 3^{n-k} x^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{k}{k!} 3^{n-k} \right) x^n.$$

což dává výsledek hledané posloupnosti:

$$y_n = \sum_{k=0}^n \frac{k}{k!} 3^{n-k}.$$

Postup řešení jsme zde ukázali na dvou jednodušších příkladech, ale z uvedených výpočtů je zřejmé, že tuto metodu by bylo možno použít i na rovnice, které mají na pravých stranách výrazy složitější.

Na závěr této kapitoly uveďme ještě malé srovnání řešení diferenčních rovnic pomocí vytvořujících funkcí a klasického řešení podle teorie diferenčního počtu. Jak jsme již uvedli u nehomogenních rovnic, rozdíl je především při práci s pravou stranou a s počátečními podmínkami. Je také vidět, že při různém způsobu řešení se dostáváme k různým typům výpočtů (např. rozklad na parciální zlomky vs. řešení rovnic o více neznámých). Jak si můžeme povšimnout u dalších příkladů, řešení některých rovnic klasickou metodou by bylo na rozdíl od řešení pomocí vytvořujících funkcí velmi obtížné nebo by dokonce vůbec nebylo možné (především tedy řešení diferenčních rovnic s jinou než speciální pravou stranou). Řešení pomocí vytvořujících funkcí se tedy jeví jako univerzálnější.

3.4. Kombinatorické úlohy

Pomocí vytvořujících funkcí můžeme také poměrně snadno řešit různé kombinatorické úlohy, jak si ukážeme v této kapitole.

3.4.1. Základní kombinatorické úlohy

Kombinatorika je poměrně oblíbenou součástí matematiky. V této kapitole si ukážeme trochu netradiční přístup při výpočtu tohoto typu úloh. Bude to samozřejmě za použití vytvořujících funkcí.

Častým typem příkladů je násobení polynomů, což si zde na úvod předvedeme.

Příklad 3.4.1. Určete koeficient u x^{15} ve výrazu $(x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^4$.

Zde nás tedy nezajímá přímo výsledek tohoto násobení, ale pouze příslušný koeficient. Ten však samozřejmě nebudeme hledat roznásobováním, máme totiž snadnější způsob řešení, a to přes vytvořující funkce. Nejprve si tedy určíme vytvořující funkci pro daný výraz, což je

$$(x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^4 = \frac{x^8}{(1-x)^4}.$$

Nyní hledejme obecně koeficient u n -té mocniny, což vede na již známý vzorec (1) z kapitoly 3.2. Dosadíme si do tohoto vzorce $k = 3$ a dostaneme

$$\sum_{n=3}^{\infty} C(n, 3)x^n = \frac{x^3}{(1-x)^4}.$$

Po úpravě na náš příklad tedy máme

$$\frac{x^8}{(1-x)^4} = \sum_{n=3}^{\infty} C(n, 3)x^{n+5} = \sum_{n=8}^{\infty} C(n-5, 3)x^n.$$

Obecně tedy koeficient u n -té mocniny v našem výrazu je

$$[x^n] = \binom{n-5}{3}.$$

V našem případě je $n = 15$ a tedy výsledek

$$[x^{15}] = \binom{15-5}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120.$$

Důležitým typem kombinačních úloh je také určování počtu kombinací. Připomeňme nejprve příslušné definice:

Definice 3.4.1. (kombinace bez opakování): Označme M množinu obsahující m různých prvků. Kombinací k -té třídy z m prvků nazýváme každou k -tici navzájem různých prvků z množiny M .

Poznámka: Úlohy vedoucí na tento typ příkladů zde nebudeme uvádět, neboť jsou snadno řešitelné pomocí kombinačních čísel.

Definice 3.4.2. (kombinace s opakováním): Mějme k dispozici m různých druhů prvků (obecně v „neomezeném množství“). Kombinací k -té třídy z m prvků s opakováním nazveme libovolnou k -tici sestavenou z prvků uvedených m druhů, přičemž na jejich pořadí nezáleží.

Poznámka: I pro tyto typy úloh samozřejmě existují vzorce s kombinačními čísly, nicméně právě zde můžeme poměrně výhodně využít vytvářející funkce.

Nastiňme si zde tedy obecný postup při takovém řešení. Obecně při něm využíváme toho, že každou kombinaci k -té třídy s opakováním lze reprezentovat součinem $x^{p_1}x^{p_2}\dots x^{p_s} = x^{p_1+p_2+\dots+p_s}$, kde $p_1 + p_2 + \dots + p_s = k$ a čísla p_i udávají počet výskytů i -tého prvku v dané kombinaci.

Pak počet všech kombinací k -té třídy z m prvků odpovídá počtu možností, jak získat člen x^k roznásobením m závorek $(1 + x + x^2 + \dots)$, a to je právě koeficient u x^k v roznásobeném součinu.

V příkladech tedy zvolíme vhodné mnohočleny, jejich součin vyjádříme ve tvaru vytvářející funkce a pomocí ní hledaný koeficient snadno určíme.

Příklad 3.4.2. Mějme množinu prvků A , dále množinu prvků B a dále množinu prvků C . Kolik existuje možností pro výběr pěti prvků z těchto množin?

Pozn.: V tomto případě jde tedy o počet kombinací 5-té třídy ze tří prvků s opakováním.

Každou množinu budeme tedy charakterizovat mocninnou řadou. Protože zde nemáme žádné omezení, bude každá mocninná řada začínat jedničkou. Hledejme tedy koeficient u x^5 v součinu

$$(1 + x + x^2 + \dots)(1 + x + x^2 + \dots)(1 + x + x^2 + \dots).$$

Tento výraz samozřejmě nebudeme roznásobovat, raději přepíšeme všechny činitele do zkráceného tvaru, který se bude posléze násobit snadněji:

$$\left(\frac{1}{(1-x)}\right)^3 = \frac{1}{(1-x)^3}.$$

Zde vyjdeme z druhé derivace výrazu $\frac{1}{1-x}$ a dostaneme jednoduše

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)x^n,$$

a protože hledáme koeficient u x^5 , dosadíme $n = 5$ a výsledkem bude

$$[x^5] = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21.$$

Příklad 3.4.3. Mějme nyní 7 prvků v množině A , 6 prvků v množině B a 4 prvky v množině C . Kolik existuje možností pro výběr pěti prvků z těchto množin, přičemž z každé množiny musíme vybrat alespoň 1 prvek?

Výsledkem bude opět koeficient u x^5 , tentokrát ovšem musí ve výběru být alespoň jeden prvek z každé skupiny, proto všechny mnohočleny musí začínat členem x^1 , neboť stupeň mocniny musí odpovídat počtu prvků ve skupinách:

$$(x + x^2 + \dots + x^7)(x + x^2 + \dots + x^6)(x + x^2 + \dots + x^4).$$

Tento součin upravíme na

$$\begin{aligned} & \frac{x - x^8}{1 - x} \cdot \frac{x - x^7}{1 - x} \cdot \frac{x - x^5}{1 - x} \\ &= (x^3 - x^7 - x^9 - x^{10} + x^{13} + x^{14} + x^{16} - x^{20}) \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)x^n, \end{aligned}$$

kde po dosazení $n = 2$ dostaneme výsledek, kterým je

$$\frac{4 \cdot 3}{2} = 6.$$

Vytvořující funkce lze velmi dobře aplikovat na klasické kombinatorické úlohy (ať už s různými omezeními pro počty prvků z jednotlivých skupin nebo bez nich), což si v následujícím textu předvedeme:

Příklad 3.4.4. Ve školní jídelně je na výběr mezi čtyřmi různými obědy. Kolik různých kombinací obědů mohou kuchařky uvařit pro 150 žáků?

Obědů mohou kuchařky uvařit „nekonečně mnoho“, proto naší vytvořující funkcí bude nekonečný mnohočlen. Výsledkem bude, podobně jako u předcházejících příkladů, koeficient u 150-té mocniny v součinu

$$(1 + x + x^2 + \dots)^4,$$

který si lze přepsat na

$$\frac{1}{(1-x)^4},$$

což můžeme spočítat podle známého vzorce a nebo trojím derivováním výrazu

$$\frac{1}{1-x}:$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)'$$

dává

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n.$$

Znovu zderivujeme a dostaneme

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n x^{n-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) x^n.$$

Třetí derivace dává

$$\frac{1}{(1-x)^4} = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2)(n+1) x^n.$$

Jelikož hledáme koeficient u 150-té mocniny, výsledkem bude

$$\frac{1}{6} \cdot 153 \cdot 152 \cdot 151 = 585276.$$

Kombinatorické příklady samozřejmě často obsahují různá omezení na počty prvků z dané skupiny, kdy můžeme omezovat jejich maximální i minimální počet. Následující dva příklady ukazují kombinaci těchto omezení.

Příklad 3.4.5. Vedoucí dětského tábora se vydal koupit tatranky pro 30 dětí. Na výběr měl arašídové, čokoládové a ořechové. Chtěl koupit od každého druhu alespoň 5 kusů a zároveň maximálně 10 kusů ořechových. Kolik měl pro svůj nákup možností?

Řešením bude zřejmě koeficient u x^{30} v součinu

$$(x^5 + x^6 + x^7 + \dots)(x^5 + x^6 + x^7 + \dots)(x^5 + x^6 + \dots + x^{10}).$$

Všechny mnohočleny si vyjádříme ve tvaru zkráceného zlomku, dostaneme tak

$$\frac{x^5}{1-x} \cdot \frac{x^5}{1-x} \cdot \frac{x^5 - x^{11}}{1-x} = \frac{x^{15} - x^{21}}{(1-x)^3} = (x^{15} - x^{21}) \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)x^n.$$

Hledáme koeficient u x^{30} , po dosazení příslušných n dostaneme požadovaný výsledek

$$\frac{17 \cdot 16 - 11 \cdot 10}{2} = 81.$$

Příklad 3.4.6. Městský dopravní podnik vlastní 7 patrových autobusů, 10 mikrobuseů a 11 „harmonik“. Ve 3 hodiny odpoledne má vyjet 17 autobusů. Spočítejme, kolik je možných kombinací pro zajištění dopravní obsluhy, jestliže víme, že harmonikou může jezdit pouze 5 řidičů a 2 trasy mohou být obslouženy pouze mikrobusem.

Jako obvykle hledáme koeficient u příslušné mocniny, v tomto případě tedy u x^{17} v součinu

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^7)(x^2 + x^3 + \dots + x^{10})(1 + x + x^2 + \dots + x^5).$$

Jednotlivé činitele opět převedeme na zkrácený tvar kvůli snadnějšímu násobení a dostaneme tak

$$\frac{1-x^8}{1-x} \cdot \frac{x^2-x^{11}}{1-x} \cdot \frac{1-x^6}{1-x} = (x^2 - x^8 - x^{10} - x^{11} + x^{16} + x^{17} + \dots) \frac{1}{(1-x)^3}.$$

V prvním činiteli nás samozřejmě členy s vyšší, než 17-tou mocninou nezajímají (vzhledem k hledanému řešení), druhý činitel upravíme podle druhé derivace výrazu $\frac{1}{1-x}$, dostaneme tak

$$(x^2 - x^8 - x^{10} - x^{11} + x^{16} + x^{17} + \dots) \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)x^n,$$

kde postupným dosazováním za n dojdeme k hledanému řešení

$$\frac{1}{2}(17.16 - 11.10 - 9.8 - 8.7 + 3.2 + 2) = 21.$$

Na závěr této kapitoly ještě ukažme příklad, kdy neomezujeme pouze maximální a minimální počet prvků z dané množiny, ale také máme požadavek, kolikačlenné skupiny prvků se mohou ve výsledné kombinaci vyskytovat.

Příklad 3.4.7. V hotelu je k mání 14 jednolůžkových pokojů 1. kategorie, 19 dvoulůžkových pokojů 2. kategorie a 6 dvoulůžkových pokojů 3. kategorie. Spočítejme, kolika možnými způsoby lze obsadit hotel třiceti turisty, jestliže víme, že již dopředu je objednáno 6 pokojů 1. kategorie.

Hledáme tak koeficient u x^{30} v součinu

$$(x^6 + x^7 + \dots + x^{14})(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{38})(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{12}),$$

který si přepíšeme na tvar součinu zlomků

$$\begin{aligned} & \frac{x^6 - x^{15}}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^{40}}{1 - x^2} \cdot \frac{1 - x^{14}}{1 - x^2} \\ &= \frac{x^6 + x^7 - x^{15} - x^{16} - x^{20} - x^{21} + x^{30} - x^{46} + \dots}{(1 - x^2)^3} \\ &= (x^6 + x^7 - x^{15} - x^{16} - x^{20} - x^{21} + x^{30} - x^{46} \\ &+ \dots) \cdot \frac{1}{(1 - x^2)^3}. \end{aligned}$$

Vzhledem k hledané mocnině nás samozřejmě další členy v prvním činiteli již nemusí zajímat. Druhý činitel si podobně jako v předchozím příkladě upravíme za pomoci dvojí derivace výrazu $\frac{1}{1-x^2}$ a dostaneme tak

$$(x^6 + x^7 - x^{15} - x^{16} - x^{20} - x^{21} + x^{30} - x^{46} + \dots) \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)nx^{2n-4}.$$

Postupně dosadíme $n = 14, n = 9, n = 7, n = 2$ a dostaneme

$$[x^{30}] = \frac{13 \cdot 14 - 8 \cdot 9 - 6 \cdot 7 + 2}{2} = 35,$$

což je právě počet hledaných kombinací obsazenosti hotelu 30-ti turisty.

3.4.2. Celočíslné řešení rovnice

Vytvořující funkce nám též umožňují zjistit počet celočíselných řešení rovnice o několika neznámých.

Příklad 3.4.8. Určeme počet celočíselných řešení rovnice

$$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 200, x_{1,2,3} \in N_0.$$

V podstatě tedy řešíme otázku, kolika různými způsoby lze nakombinovat čísla 2, 3 a 6 tak, aby daly součet 200. Hledáme tak koeficient u x^{200} v součinu

$$(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^3 + x^6 + \dots)(1 + x^6 + x^{12} + \dots),$$

který si přepíšeme na zkrácený tvar

$$\frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^6}.$$

Zde asi nejlepším způsobem je rozšířit zlomky tak, aby měly stejného jmenovatele, máme tak

$$\frac{1+x^2+x^4}{1-x^6} \cdot \frac{1+x^3}{1-x^6} \cdot \frac{1}{1-x^6} = (1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^7) \cdot \frac{1}{(1-x^6)^3}.$$

Druhého činitele si upravíme pomocí derivací výrazu $\frac{1}{1-x^6}$

$$\left(\frac{1}{1-x^6}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{6n}\right)'$$

dává

$$\frac{6x^5}{(1-x^6)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} 6nx^{6n-1}.$$

Obě strany rovnice vydělíme $6x^5$ a máme

$$\frac{1}{(1-x^6)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{6n-6}.$$

Znovu zderivujeme, dostaneme

$$\frac{12x^5}{(1-x^6)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} (6n-6)nx^{6n-7},$$

což po vydělení $12x^5$ dává

$$\frac{1}{(1-x^6)^3} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)nx^{6n-12},$$

takže po dosazení zpět do našeho výpočtu máme

$$(1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^7) \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)nx^{6n-12},$$

kde vzhledem k hledané mocnině dosadíme $n = 35$ a dojdeme tak k výsledku

$$\frac{34 \cdot 35}{2} = 595,$$

což je právě počet celočíselných řešení naší rovnice.

Poznámka: Koeficient u x^{200} v součinu

$$(1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^7) \cdot \frac{1}{(1-x^6)^3}$$

bychom mohli samozřejmě najít též pomocí substituce $x = t^6$ do nám známého vzorce (1) z kapitoly 3.2.

Klasickým kombinatorickým příkladem je tzv. rozměňování bankovek.

Příklad 3.4.9. Kolika způsoby lze rozměnit stokorunu na pětikoruny, desetikoruny a dvacetikoruny?

Hledáme tedy všechna celočíselná řešení rovnice

$$5x_1 + 10x_2 + 20x_3 = 100,$$

kde x_1 je počet pětikorun, x_2 počet desetikorun a x_3 počet dvacetikorun. Tuto rovnici můžeme vydělit pěti, budeme tak řešit rovnici

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 20.$$

Pro členy x_1, x_2, x_3 tedy máme nekonečný rozvoj a vynásobíme:

$$(1+x+x^2+x^3+\dots)(1+x^2+x^4+\dots)(1+x^4+x^8+\dots).$$

Podobně jako v předchozím příkladě si přepíšeme tento součin na součin zlomků

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^4}.$$

Opět rozšíříme zlomky tak, aby měly stejný jmenovatel, dostaneme tak součin

$$\frac{1+x+x^2+x^3}{1-x^4} \cdot \frac{1+x^2}{1-x^4} \cdot \frac{1}{1-x^4} = (1+x+2x^2+2x^3+x^4+x^5) \cdot \frac{1}{(1-x^4)^3}.$$

Druhý činitel podobně jako v předchozím příkladě určíme dvojím derivováním výrazu $\frac{1}{1-x^4}$ a dostaneme tak

$$(1 + x + 2x^2 + 2x^3 + x^4 + x^5) \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)nx^{4n-8}.$$

Po dosazení nejprve $n = 7$, a následně $n = 6$ máme řešení

$$[x^{20}] = \frac{6 \cdot 7 + 5 \cdot 6}{2} = 36.$$

Stokorunu lze tedy na pětikoruny, desetikoruny a dvacetikoruny rozměnit celkem 36-ti různými způsoby.

Příklad 3.4.10. Mějme bitový řetězec čítající 25 jedniček. Kolik různých bitových řetězců z něho můžeme vytvořit vložením tří nul tak, že žádný takto vzniklý řetězec nesmí nulou začínat, musí končit alespoň dvěma jedničkami a žádné nuly nesmí být vedle sebe?

Vložením tří nul mezi dvacet pět jedniček nám tedy vzniknou 4 skupiny jedniček, vzhledem k daným podmínkám musí každá skupina obsahovat alespoň jednu jedničku, poslední skupina alespoň dvě jedničky. Hledáme tedy všechna celočíselná řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25,$$

kde x_1, x_2, x_3, x_4 jsou počty jedniček v jednotlivých skupinách.

Díky našim podmínkám tak hledáme koeficient u x^{25} v součinu

$(x + x^2 + x^3 + \dots)(x + x^2 + x^3 + \dots)(x + x^2 + x^3 + \dots)(x^2 + x^3 + x^4 + \dots)$,
neboli

$$\frac{x^3}{(1-x)^3} \cdot \frac{x^2}{1-x} = \frac{x^5}{(1-x)^4},$$

což vede na nám dobře známý vzorec (1) z kapitoly 3.2. Dosadíme $k = 3$ a máme

$$\frac{x^3}{(1-x)^4} = \sum_{n=3}^{\infty} C(n, 3)x^n.$$

Pak tedy

$$\frac{x^5}{(1-x)^4} = \sum_{n=3}^{\infty} C(n, 3)x^{n+2} = \sum_{n=5}^{\infty} C(n-2, 3)x^n,$$

kde

$$[x^{25}] = \binom{23}{3} = 1771,$$

což je počet řetězců, které mohou vzniknout za námi stanovených podmínek.

V kapitolách 3.4.1. a 3.4.2. jsme si ukázali, že mnohé příklady, které se klasickou metodou musí mnohdy řešit složitými úvahami, lze pomocí vytvořujících funkcí řešit poměrně jednoduše a v podstatě mechanicky. Tímto způsobem se sice mnohdy můžeme dostat ke složitějšímu násobení mnohočlenů (což ale na druhou stranu pro dnešní výpočetní techniku už dávno není problém), nicméně jedná se o způsob velmi univerzální a nasaditelný pro každou situaci.

3.4.3. Vlastnosti kombinačních čísel

Pomocí vytvořujících funkcí můžeme také odvodit některé vztahy mezi kombinačními čísly.

Příklad 3.4.11. Najděme vzorec pro

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2, n \text{ pevné.}$$

Nejprve si utvoříme vytvořující funkce pro posl. $a_k = \binom{n}{k}, b_k = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

$$\text{Máme tak } (a_k) = (b_k) \leftrightarrow a(x) = b(x) = (1+x)^n.$$

Pak tedy $a(x)b(x) = (1+x)^{2n}$ je vytvořující funkce pro hledaný součet, což z binomické věty dává

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Příklad 3.4.12. Najděme obecný vzorec pro

$$\sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{s}{n-k}, \quad p, s \in \mathbb{N}, \quad p, s \geq n.$$

Nejprve si utvoříme vytvořující funkce pro posl. $a_k = \binom{p}{k}, b_k = \binom{s}{k}$. Máme tak

$$(a_k) \leftrightarrow a(x) = (1+x)^p, (b_k) \leftrightarrow b(x) = (1+x)^s.$$

Pak tedy $a(x)b(x) = (1+x)^{p+s}$ je vytvořující funkce pro hledaný součet, což z binomické věty dává

$$\sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{p+s}{n}.$$

3.5. Aplikace v teorii pravděpodobnosti

V této kapitole se budeme věnovat počtu pravděpodobnosti, samozřejmě za použití vytvořujících funkcí. Nejprve si však vymežeme některé pojmy, které zde budeme používat (nejedná se tedy povětšinou o klasické definice).

Náhodný pokus: Jedná se o pokus, jehož výsledek není předem určen jeho počátečními podmínkami.

Náhodný jev: Nazýváme tak jev, který při provedení náhodného pokusu v závislosti na náhodě může, ale také nemusí nastat.

Náhodná veličina: Označíme-li e elementární jev, potom náhodnou veličinou X je funkce, která $\forall e \in E$ přiřazuje právě jedno reálné (obecně může být i komplexní) číslo $X(e) = x$. Obor všech hodnot náhodné veličiny nazýváme definičním oborem.

Náhodné veličiny se dělí na spojité a diskrétní, nás v této práci budou zajímat jen druhé jmenované. Uvedme nyní některá známá rozdělení:

Alternativní rozdělení: Toto rozdělení má diskrétní veličina, která nabývá pouze hodnot 0 a 1 s pravděpodobnostmi $P(1) = p$ a $P(0) = 1 - p$. Hodnota p , pro kterou platí $0 < p < 1$, se nazývá parametr rozdělení.

Jednoduše řečeno, u tohoto rozdělení může dojít pouze ke dvěma situacím: Sledovaný jev buď nastal nebo nenastal.

Binomické rozdělení: Toto rozdělení popisuje četnost výskytu náhodného jevu v n pokusech, které jsou navzájem nezávislé a jev má alternativní rozdělení se stále stejnou pravděpodobností.

Poissonovo rozdělení: Toto rozdělení má náhodná veličina, která vyjadřuje počet výskytů málo pravděpodobných jevů v určitém intervalu. Bývá také označováno jako *rozdělení řídkých jevů*. Používá se k aproximaci binomického rozdělení, kde $n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0$.

Střední hodnota: Jedná se o charakteristiku rozdělení náhodné veličiny, která vyjadřuje její očekávanou hodnotu a pro náhodnou veličinu s hodnotami $x = 0, 1, 2, \dots$ s pravděpodobnostmi p_0, p_1, p_2, \dots je definována vztahem

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} np_n.$$

Zavedme si nyní pravděpodobnostní vytvořující funkci.

Definice 3.5.1. (pravděpodobnostní vytvořující funkce): Rozdělení diskrétní náhodné veličiny X definované pro $x = 0, 1, 2, \dots$ s pravděpodobnostmi p_0, p_1, p_2, \dots lze vyjádřit též ve formě pravděpodobnostní vytvořující funkce jako

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n.$$

Tato řada konverguje alespoň pro $|x| \leq 1$, protože $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$.

Touto pravděpodobnostní funkcí je rozdělení náhodné veličiny X jednoznačně určeno, protože všechny p_0, p_1, p_2, \dots lze vypočítat z této funkce:

$$p_0 = p(0),$$

$$p_n = \frac{p^{(n)}(0)}{n!},$$

kde $p^{(n)}(0)$ je n -tá derivace v bodě 0.

Vytvořující funkce pro alternativní rozdělení tak je

$$p(x) = 1 - p + px.$$

Příklad 3.5.1. Určeme pravděpodobnostní vytvořující funkci pro hod hrací kostkou, kdy sledujeme, zda padne číslo 1.

Pravděpodobnost, že padne sledovaná hodnota, je $p_1 = \frac{1}{6}$, pravděpodobnost, že tato hodnota nepadne, je $p_0 = \frac{5}{6}$. Hledaná vytvořující funkce je tak

$$p(x) = \frac{5}{6} + \frac{1}{6}x.$$

Vydeme-li z vytvořující funkce pro alternativní rozdělení, pak pro binomické máme dle definice tohoto rozdělení

$$p(x) = ((1 - p) + px)^n.$$

Jedním z důležitých využití pravděpodobnostních vytvořujících funkcí je jednoduchý výpočet charakteristik. Např. pro střední hodnotu platí, že ji lze spočítat jako derivaci dané pravděpodobnostní funkce v bodě 1. Zderivujeme-li totiž sumu v definici 3.5.1., dostaneme

$$p'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} np_n x^{n-1}$$

a odsud

$$p'(1) = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = E(X).$$

Střední hodnota pro alternující rozdělení je tedy $E(X) = p$. Snadno ji spočítáme i pro binomické rozdělení:

$$p'(x) = np((1 - p) + px)^{n-1}.$$

V bodě $x = 1$ pak dostáváme $E(X) = np$.

Dalším využitím pravděpodobnostní vytvořující funkce je možnost výhodného výpočtu pravděpodobnosti při opakovaných pokusech.

Často je nějaká veličina Y ve tvaru součtu nezávislých veličin, tedy

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_s.$$

Pak její vytvořující funkce je

$$p_Y(x) = \prod_{i=1}^s p_{X_i}(x)$$

a v ní koeficienty u x^k vyjadřují pravděpodobnost, že v s pokusech nastane právě k sledovaných jevů. Předvedme tento postup na dvou příkladech:

Příklad 3.5.2. Jaká je pravděpodobnost, že při losování čtyř čísel ve hře „Milion“ padnou dvě trojky, jestliže se losuje z čísel od 1 do 10-ti?

Jedná se tedy o čtyři na sobě nezávislé pokusy, v nichž v každém pokusu je pravděpodobnost jevu „padne trojka“ $\frac{1}{10}$, pravděpodobnost jevu „nepadne trojka“ pak $\frac{9}{10}$. Jde tedy o veličinu s binomickým rozdělením, proto hledaným výsledkem bude koeficient u x^2 v pravděpodobnostní vytvořující funkci

$$p(x) = \left(\left(1 - \frac{1}{10} \right) + \frac{1}{10}x \right)^4,$$

což z binomické věty je 0,0486.

Příklad 3.5.3. Razící přístroj má do traverzy vyrazit 3 různé znaky. Pravděpodobnost, že první znak nevyrazí, je 0,04, pravděpodobnost, že nevyrazí druhý znak, je 0,07 a pravděpodobnost, že nevyrazí třetí znak, je 0,09. Jaká je pravděpodobnost, že vyrobená traverza bude bez chyby, s jednou chybou, s dvěma chybami a se třemi chybami?

Stanovme si nejprve vytvořující funkce pro pravděpodobnost, že daná chyba nastala. Zřejmě

$$p_{X_1}(x) = (0,96 + 0,04x), p_{X_2}(x) = (0,93 + 0,07x), p_{X_3}(x) = (0,91 + 0,09x).$$

Hledanými výsledky jsou pak koeficienty u příslušných mocnin x v součinu

$$\begin{aligned} & (0,96 + 0,04x)(0,93 + 0,07x)(0,91 + 0,09x) \\ &= 0,812448 + 0,175356x + 0,011944x^2 + 0,000252x^3. \end{aligned}$$

Pravděpodobnost bezchybného výrobku je tedy 0,812448, pravděpodobnost, že výrobek bude mít jednu závadu je 0,175356, pravděpodobnost dvou závad je 0,011944 a u tří závad je to 0,000252.

4. Exponenciální vytvořující funkce

Kromě obyčejných vytvořujících funkcí existují ještě jiné vytvořující funkce, například exponenciální. Těm se budeme věnovat v této kapitole. Jednou z výhod je, že poloměr konvergence exponenciální vytvořující funkce není nikdy menší než poloměr obyčejné vytvořující funkce, často je dokonce větší.

4.1. Zavedení exponenciálních vytvořujících funkcí

V této kapitole si zavedeme exponenciální vytvořující funkce, shrneme a dokážeme některé jejich vlastnosti a ukážeme si, jak k dané posloupnosti utvořit exponenciální vytvořující funkci (a také naopak, jak z exponenciální funkce získat zpět posloupnost, kterou tato funkce vytváří).

Definice 4.1.1. (exponenciální vytvořující funkce): Mějme posloupnost reálných čísel (a_n) . Exponenciální vytvořující řadou této posloupnosti rozumíme řadu

$$a_0 + a_1x + \frac{a_2x^2}{2!} + \cdots + \frac{a_nx^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_nx^n}{n!}.$$

Má-li tato řada nenulový poloměr konvergence, pak ji nazveme exponenciální vytvořující funkcí dané posloupnosti a označíme ji $A(x)$.

Poznámka:

1. Mějme exponenciální vytvořující funkci $A(x)$. Posloupnost, kterou tato funkce vytváří, získáme zpět dle vzorce

$$a_n = A^{(n)}(0),$$

kde $A^{(n)}(0)$ značí n -tou derivaci funkce $A(x)$ v bodě 0.

2. Z konstrukce exponenciální vytvořující funkce a z bodu 1 vyplývá, že vytvořující funkce k dané posloupnosti je určena jednoznačně.
3. Obyčejná vytvořující funkce některých posloupností nelze vůbec vytvořit, kdežto exponenciální vytvořující funkce ano (například pro posloupnost $(a_n), a_n = n!$).

4. Zápisem $(a_n) \leftrightarrow A(x)$ budeme značit vzájemně si odpovídající posloupnost a její exponenciální vytvořující funkci.

Ukažme si na úvod znovu jednoduchý příklad, na kterém demonstrujeme konstrukci vytvořující funkce k dané posloupnosti.

Příklad 4.1.1. Utvořme exponenciální vytvořující funkci k posloupnosti (a_n) , $a_n = 1$.

Vytvořující řadou této posloupnosti je řada

$$A(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Pozn.: Všimněme si oboru konvergence vytvořující funkce pro tuto posloupnost. U obyčejné vytvořující funkce máme podmínku $x \in (-1, 1)$, kdežto u exponenciální vytvořující funkce je $x \in \mathbf{R}$.

Dále uvedme základní vlastnosti exponenciálních vytvořujících funkcí:

1. Sčítáme-li posloupnosti, odpovídá tomu též sčítání jejich vytvořujících funkcí. Tedy posloupnost (c_n) , $c_n = (a_n + b_n)$ má vytvořující funkci

$$C(x) = A(x) + B(x).$$

Důkaz: Posloupnost c_n má vytvořující funkci

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_n + b_n)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n x^n}{n!} = A(x) + B(x).$$

2. Násobíme-li posloupnosti reálným číslem α , odpovídá tomu násobení k ní příslušné vytvořující funkce číslem α . Tedy posloupnost $(\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \dots)$ má exponenciální vytvořující funkci $\alpha A(x)$.

Důkaz: Exponenciální vytvořující funkce dané posloupnosti je

$$\alpha a_0 + \alpha a_1 x + \frac{\alpha a_2 x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha a_n x^n}{n!} = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!} = \alpha A(x).$$

3. Mějme posloupnost (a_n) a její exponenciální vytvořující funkci $A(x)$. Pak exponenciální vytvořující funkce $A'(x)$ vytváří posloupnost (a_{n+1}) .

Důkaz:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1} x^n}{n!}.$$

4. Je-li $(a_n) \leftrightarrow A(x)$, pak exponenciální vytvořující funkcí pro posloupnost $(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \dots)$ je $A(\alpha x)$.

Důkaz: Daná posloupnost má vytvořující funkci

$$a_0 + \alpha a_1 x + \frac{\alpha^2 a_2 x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n a_n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \alpha^n x^n}{n!} = A(\alpha x).$$

5. Pro posloupnost $(a_n), a_n = n a_n$ je exponenciální vytvořující funkce $x A'(x)$.

Důkaz: Příslušnou vytvořující funkcí je

$$a_1 x + \frac{2 a_2 x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n a_n x^n}{n!} = x A'(x).$$

6. Mějme $(a_n) \leftrightarrow A(x), (b_n) \leftrightarrow B(x)$. Pak $A(x)B(x)$ je exponenciální vytvořující funkcí posloupnosti

$$(c_n), c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k}.$$

Důkaz: Roznásobme si příslušné vytvořující funkce

$$\begin{aligned} A(x)B(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n x^n}{n!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{a_k x^k}{k!} \cdot \frac{b_{n-k} x^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{n!}{k! (n-k)!} a_k b_{n-k}\right) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k} a_k b_{n-k} x^n}{n!}, \end{aligned}$$

což je právě vytvořující funkce posloupnosti (c_n) .

7. Je-li $(a_n) \leftrightarrow A(x)$, pak posloupnost

$$(b_n), b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$$

má exponenciální vytvořující funkci $B(x) = A(x)e^x$.

Důkaz: Hledáme tedy vytvořující funkci pro posloupnost

$$(a_0, \binom{1}{0}a_0 + \binom{1}{1}a_1, \binom{2}{0}a_0 + \binom{2}{1}a_1 + \binom{2}{2}a_2, \dots).$$

Její exponenciální vytvořující řadou je

$$B(x) = a_0 + \left(\binom{1}{0}a_0 + \binom{1}{1}a_1 \right)x + \frac{\left(\binom{2}{0}a_0 + \binom{2}{1}a_1 + \binom{2}{2}a_2 \right)x^2}{2!} + \dots$$

Vytkneme a dostaneme

$$B(x) = a_0 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \right) + a_1 x \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \right) + \frac{a_2 x^2}{2!} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \right) + \dots = A(x)e^x.$$

Nyní uveďme několik jednoduchých příkladů nalezení exponenciální vytvořující funkce k příslušné posloupnosti. Budeme zde samozřejmě vycházet z výše uvedených vlastností.

Příklad 4.1.2. Nalezněme exponenciální vytvořující funkci k posloupnosti $(a_n), a_n = (-1)^n$.

Vytvořující řadou této posloupnosti je řada

$$A(x) = -1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}.$$

Podle vlastnosti (4) je tedy hledanou exponenciální vytvořující funkcí funkce

$$A(x) = e^{-x}.$$

Příklad 4.1.3. Nalezněme exp. vytvořující funkci k posloupnosti $(a_n), a_n = n$.

Podle vlastnosti (5) dostáváme přímo výsledek $A(x) = xe^x$.

Příklad 4.1.4. Nalezněme exponenciální vytvořující funkci k posloupnosti $(a_n), a_n = n^2$.

Vydeme-li z předchozího příkladu a znovu z vlastnosti (5), pak dostaneme $A(x) = x(xe^x)' = x(e^x + xe^x) = xe^x(1 + x)$.

Příklad 4.1.5. Nalezněme exponenciální vytvořující funkci pro obecnou aritmetickou posloupnost $(a_n), a_n = a_0 + nd, n \in N_0, d$ je difference mezi dvěma po sobě jdoucími členy.

Podle vlastnosti (2) a příkladu 4.1.3. dostáváme rovnou výsledek, kterým je

$$A(x) = a_0 e^x + dx e^x.$$

Příklad 4.1.6. Nalezněme exponenciální vytvořující funkci pro obecnou geometrickou posloupnost $(a_n), a_n = a_0 q^n, n \in N_0$.

Podle (4) máme pro posloupnost $(b_n), b_n = q^n$ exponenciální vytvořující funkci

$$B(x) = e^{qx}.$$

Pak podle (2) je pro hledanou posloupnost vytvořující řada

$$A(x) = a_0 q^0 + a_0 q^1 x + \frac{a_0 q^2 x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0 q^n x^n}{n!},$$

což dává vytvořující funkci

$$A(x) = a_0 e^{qx}.$$

Příklad 4.1.7. Nalezněme exponenciální vytvořující funkci k posloupnosti $(a_n), a_n = n!$

Vytvořující řada k této posloupnosti je

$$A(x) = 1 + x + \frac{2! x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Definičním oborem funkce $A(x)$ je obor konvergence dané řady, tj. $(-1, 1)$.

Příklad 4.1.8. Nalezněme nyní naopak posloupnost k exponenciální vytvořující funkci $A(x) = (1 + x)^n$ pro pevné $n \in N$.

Tento mnohočlen jako obyčejná vytvořující funkce vytváří posloupnost binomických koeficientů $\binom{n}{k}, k = 0, 1, \dots$. Protože se exponenciální vytvořující funkce od obyčejné odlišuje faktoriálem ve jmenovateli, musíme tyto binomické koeficienty ještě příslušným faktoriálem násobit, abychom získali správnou posloupnost. Daná exponenciální vytvořující funkce tak vytváří posloupnost

$$(a_k), a_k = \binom{n}{k} k! \text{ pro } k = 0, 1, \dots, n, a_k = 0 \text{ pro } k > n.$$

4.2. Aplikace exponenciálních vytvořujících funkcí

Samozřejmě, také exponenciální funkce mají širokou škálu využití v praxi. Jak záhy uvidíme, dají se využívat v kombinatorice (například na určení počtu variací s opakováním), na získání některých součtových vzorců, a podobně. To bude náplní této kapitoly.

Definice 4.2.1. (variace bez opakování): Variací k -té třídy z n prvků bez opakování rozumíme skupinu k prvků vybraných z celkového počtu n prvků, přičemž na pořadí jednotlivých prvků ve výběru záleží a každý prvek se v něm může objevit pouze jednou.

Věta 4.2.1. (počet variací bez opakování): Počet variací k -té třídy z n prvků zjistíme dle vzorce

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Definice 4.2.2. (variace s opakováním): Variací k -té třídy z n prvků s opakováním rozumíme skupinu k prvků vybraných z celkového počtu n prvků, přičemž na pořadí jednotlivých prvků ve výběru záleží a každý prvek se v něm může objevit vícekrát.

Věta 4.2.2. (počet variací s opakováním): Počet variací k -té třídy z n prvků určíme dle vzorce

$$V'_k(n) = n^k.$$

Otázka, kterou si zde čtenář nejspíš položí, by mohla znít, co společného mají exponenciální vytvářující funkce s variacemi. Odpověď je jednoduchá. Počet variací k -té třídy z n prvků s libovolným opakováním totiž není nic jiného, než koeficient při $\frac{x^k}{k!}$ v řadě

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots\right)^n.$$

Uvedme si nyní jednoduchý příklad

Příklad 4.2.1. Mějme množinu prvků A a množinu prvků B . Kolik variací sedmé třídy můžeme z těchto prvků vytvořit za podmínky, že prvků z množiny A se objeví lichý počet a prvky z množiny B budou maximálně tři?

Podobně jako u počtu kombinací, i zde budeme hledat koeficient v součinu, který ovšem tentokrát bude mít trochu jinou podobu. Zjevně tedy hledáme koeficient u $\frac{x^7}{7!}$ v součinu

$$\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots\right) \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right),$$

což dává výsledek

$$1 + \frac{7!}{5!2!} = 22.$$

Příklad 4.2.2. Odvoďme vzorec pro

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k.$$

Budeme postupovat dle vlastnosti (7), kde zvolíme posloupnost (a_n) , $a_n = n$. Její vytvářující funkce je, jak jsme již spočítali, $A(x) = xe^x$. Pak vytvářující funkce pro hledanou posloupnost částečných součtů je $B(x) = xe^xe^x = xe^{2x}$. Hledáme tak koeficient u $\frac{x^n}{n!}$ v tomto rozvoji.

$$xe^{2x} = x + 2x^2 + \frac{4x^3}{2!} + \dots = x + \frac{2 \cdot 2x^2}{2!} + \frac{3 \cdot 4x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot 2^{n-1}}{n!} x^n.$$

Tedy

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k = n \cdot 2^{n-1}.$$

Na závěr ještě uvedme dvě zajímavé posloupnosti, které se často objevují v různých příkladech v souvislosti s vytvořujícími funkcemi a s exponenciálními vytvořujícími funkcemi. Jedná se o Stirlingova a Bellova čísla.

4.2.1. Stirlingova čísla

V této kapitole se budeme věnovat Stirlingovým číslům druhého druhu. Ukážeme si rekurentní vzorec pro jejich výpočet, jejich vytvořující funkci a také použití.

Definice 4.2.3. (Stirlingova čísla druhého druhu): Mějme $n > k$. Stirlingovo číslo $S(n, k)$ vyjadřuje počet rozkladů množiny n prvků na k neprázdných disjunktních podmnožin. Přitom definujeme $S(0, 0) = 1$.

Z definice vyplývá, že pro $n = 1, 2, \dots$ je $S(n, 0) = 0, S(n, 1) = 1, S(n, n) = 1, \dots$

Příklad 4.2.3. Určeme číslo $S(4, 2)$.

Otázka tedy zní, kolika způsoby lze čtyřprvkovou množinu rozložit na 2 neprázdné disjunktní podmnožiny. To lze udělat následujícími způsoby:

$\{12\}\{34\}; \{13\}\{24\}; \{14\}\{23\}; \{124\}\{3\}; \{134\}\{2\}; \{1\}\{234\}; \{4\}\{123\}.$

Výsledkem tedy je $S(4, 2) = 7$.

Odvoďme si rekurentní vztah pro Stirlingova čísla druhého druhu

Nechť máme dána kladná celá čísla n, k . Množinou všech možných rozkladů n prvků na k podmnožin je podle definice $S(n, k)$. Rozdělme si soubor těchto rozkladů do dvou skupin. Do první skupiny zahrneme všechny rozklady na k podmnožin, ve kterých n -tý prvek sám tvoří jednu podmnožinu. Do druhé skupiny zahrneme všechny ostatní rozklady. Otázkou tedy je, kolik částí je v každé z těchto dvou skupin (vyjádřeno pomocí Stirlingových čísel).

Uvažujme první skupinu. Pokud nebudeme uvažovat právě jednoprvkovou podmnožinu obsahující prvek n , která je součástí každého rozkladu ve skupině, pak nám zbývá kompletní soubor rozkladu $(n-1)$ prvků do $(k-1)$ tříd. Tj. v první skupině máme přesně $S(n-1, k-1)$ možností rozkladu.

Uvažujme nyní druhou skupinu. Zde n -tý prvek bude vždy ve společnosti dalších prvků. Pokud odebereme prvek n , kdykoliv se objeví, počet tříd se nezmění, ale naše skupina bude nyní obsahovat pouze podmnožiny $(n-1)$ prvků do k tříd. Ovšem každá z těchto podmnožin bude v této skupině vícekrát. Pokud vyjdeme ze souboru podmnožin o $(n-1)$ prvcích, pak máme k možností, jak přidat prvek n a vytvořit tuto druhou skupinu. Např. pro $S(4,2)$ druhá skupina obsahuje následující podmnožiny:

$\{12\}\{34\}; \{13\}\{24\}; \{14\}\{23\}; \{124\}\{3\}; \{134\}\{2\}; \{1\}\{234\}.$

Poté, co vyškrtáme číslo 4, kdekoli se vyskytla, dostaneme následující rozklad:

$\{12\}\{3\}; \{13\}\{2\}; \{1\}\{23\}; \{12\}\{3\}; \{13\}\{2\}; \{1\}\{23\}.$

Když se na tento seznam podíváme, pak jsou to všechny rozklady tříprvkové množiny na dvě podmnožiny, kde každý rozklad je uveden dvakrát. Tudíž tento seznam obsahuje přesně $2 \cdot S(3, 2)$ rozkladů.

V obecném případě pokud vymažeme číslo n , kdykoliv se vyskytne, dostaneme seznam všech rozkladů $(n-1)$ prvků do k tříd, přičemž každý rozklad se vyskytne právě k -krát. Tudíž tento seznam obsahuje přesně $k \cdot S(n-1, k)$ rozkladů.

Původní seznam $S(n, k)$ rozkladů byl tak rozdělen na dvě skupiny, z nichž první obsahuje $S(n-1, k-1)$ rozkladů a druhá obsahuje $k \cdot S(n-1, k)$ rozkladů.

Z toho vyplývá rekurentní vztah

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k)$$

s podmínkami $S(n, k) = 0$ pro $k > n, n < 0, k < 0$,

$S(n, 0) = 0$ pro $n \neq 0$ a klademe $S(0, 0) = 1$.

S pomocí tohoto rekurentního vztahu si můžeme odvodit (obyčejnou) vytvořující funkci pro Stirlingova čísla druhého druhu pro pevné k . Podle definice tak máme

$$s_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S(n, k)x^n.$$

Vydeme-li z našeho rekurentního vztahu, dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty} S(n, k)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} S(n-1, k-1)x^n + k \sum_{n=1}^{\infty} S(n-1, k)x^n,$$

neboli

$$\sum_{n=0}^{\infty} S(n, k)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S(n, k-1)x^{n+1} + k \sum_{n=0}^{\infty} S(n, k)x^{n+1}.$$

Pak tedy

$$s_k(x) = xs_{k-1}(x) + kxs_k(x),$$

což dává

$$s_k(x) = \frac{x}{1-kx} s_{k-1}(x) \text{ pro } k \geq 1, \text{ kde } s_0(x) = 1.$$

Odsud tedy dostávám vytvářející funkci posloupnosti Stirlingových čísel druhého druhu:

$$s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x) \dots (1-kx)}.$$

Stirlingových čísel druhého druhu můžeme využít například v tzv. rozmísťovacích úlohách, tj. v úlohách, ve kterých řešíme otázku, kolika způsoby lze rozmístit n prvků do k přihrádek.

Příklad 4.2.4. Kolika různými způsoby můžeme rozmístit pět různobarevných míčků do tří nerozlišitelných přihrádek za předpokladu, že žádná přihrádka nebude prázdná?

Zde je už od pohledu jasné, že řešíme v podstatě počet rozkladů pěti prvků na tři množiny, což jsou z definice právě Stirlingova čísla druhého druhu. Výsledkem tedy je

$$S(5,3) = 25.$$

Příklad 4.2.5. Znovu máme rozmístit pět míčků, tentokrát ovšem do tří očíslovaných přihrádek. Kolik způsobů takového rozmístění nalezneme?

Na rozdíl od předchozího příkladu, nyní jsou přihrádky rozlišitelné. Počet způsobů, jak obecně očíslovat k přihrádek, je samozřejmě $k!$. Řešením tedy je

$$3! \cdot S(5,3) = 6 \cdot 25 = 150.$$

4.2.2. Bellova čísla

Zde se budeme věnovat Bellovým číslům. Ukážeme jejich vztah s čísly Stirlingovými, odvodíme exponenciální vytvořující funkci a na závěr také ukážeme využití jejich vlastností.

Definice 4.2.4. (Bellova čísla): Bellova čísla udávají počet všech rozkladů množiny n prvků na neprázdné podmnožiny. Platí tedy

$$b_n = \sum_{k=0}^n S(n, k).$$

Pak tedy exponenciální vytvořující řadou Bellových čísel je

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n.$$

Spočtíme exponenciální vytvořující funkci pro tato čísla. Vyjdeme ze vztahu, který je uveden v literatuře [7]:

$$b_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}, n \geq 1.$$

Pak tedy

$$B(x) - b_0 = \frac{1}{e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$$

$$B(x) - 1 = \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(kx)^n}{n!}$$

$$B(x) - 1 = \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (e^{kx} - 1)$$

$$B(x) - 1 = \frac{1}{e} (e^{e^x} - e)$$

$$B(x) - 1 = e^{e^x - 1} - 1$$

$$B(x) = e^{e^x - 1}.$$

Také Bellova čísla se užívají k řešení různých úloh. Udávají například počet ekvivalencí, které lze na množině n prvků vytvořit. Dokažme pomocí Bellových čísel následující vztah pro počet ekvivalencí: Pro číslo b_{n+1} , tj. pro počet ekvivalencí na množině $(n + 1)$ prvků, platí:

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k.$$

Podle vlastnosti (3) tedy exponenciální vytvořující funkci pro posloupnost na levé straně získáme derivací vytvořující funkce posloupnosti Bellových čísel, což dává $e^{e^x - 1} \cdot e^x$. Pro výpočet exponenciální vytvořující funkce posloupnosti na pravé straně využijeme vlastnosti (7), kde za posloupnost a_k zvolíme posloupnost Bellových čísel. Podle této vlastnosti tak máme pro posloupnost na pravé straně exponenciální vytvořující funkci $e^{e^x - 1} \cdot e^x$, čímž jsme daný vztah dokázali.

Další zajímavou vlastností Bellových čísel je, že jejich exponenciální vytvořující funkci lze získat složením exponenciálních vytvořujících funkcí $F(x)$ a $G(x)$ k jednoduchým posloupnostem.

Definujme si nejprve skládání exponenciálních vytvořujících funkcí jakožto skládání mocninných řad:

Nechť $F(x)$ je exponenciální vytvořující funkce k libovolné posloupnosti (f_n) a $G(x)$ je exponenciální vytvořující funkce k posloupnosti (g_n) , kde $g_0 = 0$. Pak složením obou funkcí dostáváme mocninnou řadu

$$H(x) = f_0 + f_1 \left(g_1 x + \frac{g_2 x^2}{2!} + \dots \right) + \frac{f_2}{2!} \left(g_1 x + \frac{g_2 x^2}{2!} + \dots \right)^2 + \dots$$

Příklad 4.2.6. Mějme posloupnost (f_n) , $f_n = 1$ pro $n = 0, 1, 2, \dots$ a posloupnost (g_n) , $g_n = 1$ pro $n = 1, 2, 3, \dots$, $g_0 = 0$. Najděme řadu, která vznikne složením jejich exponenciálních vytvořujících funkcí.

Dosazením do definice máme rovnou

$$\begin{aligned}
 F(G(x)) &= 1 + \left(x + \frac{x^2}{2!} + \dots\right) + \frac{1}{2!} \left(x + \frac{x^2}{2!} + \dots\right)^2 + \dots \\
 &= 1 + \frac{e^x - 1}{1!} + \frac{(e^x - 1)^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^x - 1)^n}{n!} = e^{e^x - 1}.
 \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že výsledná řada je exponenciální vytvořující funkcí k posloupnosti Bellových čísel.

5. Závěr

Cílem této práce bylo především ukázat jiný přístup k řešení v matematice často se vyskytujících úloh. Po zavedení pojmu vytvořující funkce, shrnutí důležitých vlastností a ukázkách tvorby vytvořujících funkcí k různých posloupnostem bylo přistoupeno k řešení různých typů příkladů. Při řešení úloh o posloupnostech či diferenčních rovnic byl uveden jiný algoritmus než obvykle používaný, který umožňuje nalézt řešení i pro méně obvyklé typy diferenčních rovnic. Ukázány byly též jiné důkazy známých vztahů týkajících se Fibonacciho čísel. Především ale při řešení úloh kombinatorických byl zcela patrný diametrální rozdíl mezi obvyklým způsobem řešení a postupem pomocí vytvořujících funkcí. Tyto typy příkladů se často řeší pomocí složitých úvah a triků (zvláště v příkladech, kde jsou kladeny různé omezující podmínky), na které obecně nemusí být snadné přijít. Řešení přes vytvořující funkce ukázalo jasný postup, který se pak stává v podstatě technickou záležitostí. V práci bylo dále předvedeno i využití pravděpodobnostních vytvořujících funkcí.

V závěrečné části práce byly ještě zavedeny vytvořující funkce exponenciální. Princip práce s nimi je velmi podobný předchozímu. Podobně, jako byly použity obyčejné vytvořující funkce při výpočtů kombinací, uplatní se exponenciální vytvořující funkce při výpočtu variací. Aplikační část byla dále doplněna o zajímavé posloupnosti, Stirlingova a Bellova čísla.

Ač námět diplomové práce není příliš zaměřen k využití na základní škole, přesto by se mohl uplatnit např. v matematickém kroužku na víceletém gymnáziu, kdy již žáci znají pravidla pro počítání s mocninami. Mezi žáky tohoto věku jsou posloupnosti poměrně populární, bývají poměrně často obsaženy v IQ testech (zde je ovšem třeba podotknout, že samotný tento fakt je poněkud problematický). Za předpokladu znalosti posloupností lze intuitivně zavést pojem řady a poté je možné pomocí jednoduchých vytvořujících funkcí počítat zajímavé příklady z oblasti kombinatoriky, a to i s žáky, kteří ještě klasický postup pro takové úlohy neprobírali.

6. Seznam použité literatury

- [1] REKTORYS, K. a kol.: Přehled užité matematiky. 1. vyd., Praha, SNTL 1963, L11-El-IV-51-1364..
- [2] HÁTLE, J. – KAHOUNOVÁ, J.: Úvod do teorie pravděpodobnosti, 1. vyd., Praha : SNTL ; Bratislava : Alfa, 1987.
- [3] MATOUŠEK, J. – NEŠETŘIL, J.: Kapitoly z diskrétní matematiky, Praha, 2002.
- [4] KOUCKÝ, M.: Diskrétní matematika. II, Liberec, Technická univerzita v Liberci, 2003.
- [5] ZÍTEK, F.: Vytvořující funkce, Praha, ÚV Matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta, 1972.
- [6] KAŇKA, M – HENZLER, J.: Matematika 2, Praha, 2003.
- [7] WILF, Herbert S.: Generatingfunctionology, 2nd edition, University of Pennsylvania, Philadelphia, Academic Press, 1994
[.http://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html](http://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html)), anglicky.
- [8] ONDRÁČKOVÁ, E.: Vytvořující funkce, <http://mks.mff.cuni.cz>.
- [9] BOGOMOLNY, A.: Generating functions
<http://www.cut-the-knot.org/blue/GeneratingFunctions.shtml>, anglicky.
- [10] Generating function, dostupné na
http://en.wikipedia.org/wiki/Generating_function, anglicky.
- [11] Examples of generating functions, dostupné na
http://en.wikipedia.org/wiki/Examples_of_generating_functions, anglicky.